Teil 10: Vollständige Induktion

Die *vollständige Induktion* ist eine Beweistechnik für All-Aussagen der Form $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n)$. Darüber hinaus lässt sie sich leicht von natürlichen Zahlen auf andere diskrete Strukturen wie Graphen, Zeichenketten, etc. erweitern.

Ziel: Beweis einer All-Aussage $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n)$.

Vorüberlegung:

- Es ist oft schwer, die All-Aussage $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n)$ direkt zu beweisen.
- Manchmal ist es leichter, die Aussage $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n) \to A(n+1)$ zu beweisen.
  - Achtung: Das ist <u>nicht</u> die eigentlich zu beweisende Aussage!
- Angenommen, wir könnten nachweisen, dass folgende Aussage wahr ist:

$$A(1) \ \wedge\ \forall n \in \mathbb{N}\colon A(n) \to A(n+1).$$

- Der Ausdruck $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n) \to A(n+1)$ bedeutet
  - $A(1) \to A(2)$,
  - $A(2) \to A(3)$,
  - $A(3) \to A(4)$, etc.
- $A(1)$ ist nach Voraussetzung wahr.
- Die Wahrheit von $A(1)$ wird durch $A(1) \to A(2)$ auf $A(2)$ übertragen (*Modus Ponens*).
- Die Wahrheit von $A(2)$ wird durch $A(2) \to A(3)$ auf $A(3)$ übertragen (*Modus Ponens*).
- Die Wahrheit von $A(3)$ wird durch $A(3) \to A(4)$ auf $A(4)$ übertragen (*Modus Ponens*).
- Es tritt eine Kettenreaktion ein, aus der folgt, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist:

$$A(1) \to A(2) \to A(3) \to A(4) \to \ldots.$$

- Das Prinzip ist vergleichbar mit einem Domino-Effekt:
  - Der Anstoß des ersten Steines $A(1)$ sorgt dafür, dass alle weiteren Steine fallen.
- Aus $A(1) \ \wedge\ \forall n \in \mathbb{N}\colon A(n) \to A(n+1)$ folgt also, dass $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n)$ gilt.

Beweisstruktur

- Induktionsanfang: Wir beweisen, dass die Aussage $A(1)$ wahr ist.
- Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl.
  - Induktionsannahme: $A(n)$ ist wahr.
  - Induktionsbehauptung: Aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$.
  - Wichtig: Beweis der Induktionsbehauptung.
- Induktionsschluss: Wir stellen fest, dass aus Induktionsanfang und Induktionsschritt die zu beweisende All-Aussage $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n)$ folgt.

Beispiel 1: Wir demonstrieren das Prinzip an folgendem Satz:

Satz 1. *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt:* $n \cdot (n+1)$ *ist gerade.*

Struktur des Satzes: $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n)$ mit

- $A(n)\colon n \cdot (n+1)$ ist gerade.

$\rightarrow$ $A(n+1)\colon (n+1)(n+2)$ ist gerade.

Induktionsbeweis.

- Induktionsanfang: Die Aussage $A(1)$ ist wahr, da $1 \cdot (1+1) = 2$ gerade ist.
- Induktionsschritt: Sei n eine beliebige natürliche Zahl.
  - Induktionsannahme: Wir nehmen an, die Aussage $A(n)$ sei wahr, dass also gilt:

    $$n \cdot (n+1) \text{ ist gerade.}$$

  - Induktionsbehauptung: Wir behaupten, dass $A(n+1)$ aus $A(n)$ folgt, d. h.:

    $$n \cdot (n+1) \text{ ist gerade} \quad \rightarrow \quad (n+1) \cdot (n+2) \text{ ist gerade.}$$

  - Wir beweisen die Induktionsbehauptung:

	Aussage	**Begründung**
	$n \cdot (n+1)$ ist gerade	(Induktionsannahme)
$\rightarrow$	$\exists m \in \mathbb{N}\colon n \cdot (n+1) = 2m$	(Definition „gerade“)
$\rightarrow$	$\exists m \in \mathbb{N}\colon n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1) = 2m + 2 \cdot (n+1)$	(Beids. Add. erhält Gleichheit)
$\rightarrow$	$\exists m \in \mathbb{N}\colon (n+1) \cdot (n+2) = 2(m+n+1)$	(Ausklammern, Zusammenfassen)
$\rightarrow$	$\exists k \in \mathbb{N}\colon (n+1) \cdot (n+2) = 2k$	($k = m+n+1 \in \mathbb{N}$)
$\rightarrow$	$(n+1) \cdot (n+2)$ ist gerade	(Definition „gerade“)

- Induktionsschluss: Aus Induktionsanfang und -schritt folgt, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt: $n \cdot (n+1)$ ist gerade

$\square$

Aufgabe 1: Warum haben wir beim Beweis der Induktionsbehauptung ausgerechnet den Term $2(n+1)$ hinzu addiert? Wie kommen wir auf diesen Term?

Beispiel 2: Wir kennen bereits folgenden Satz (Gaußsche Summenformel):

Satz 2. *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt:* $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Struktur des Satzes: $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n)$ mit

- $A(n)\colon\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.
- $A(n+1)\colon\ \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$.

Induktionsbeweis.

- Induktionsanfang: Die Aussage $A(1)$ ist wahr, da
$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1\cdot 2}{2} = \frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$
- Induktionsschritt: Sei n eine beliebige natürliche Zahl.
  - Induktionsannahme: Wir nehmen an, die Aussage $A(n)$ sei wahr, dass also gilt:
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$
  - Induktionsbehauptung: Wir behaupten, dass $A(n+1)$ aus $A(n)$ folgt, d. h.:
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2} \quad \rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}.$$
  - Wir beweisen die Induktionsbehauptung:

	Aussage	**Begründung**
	$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$	(Induktionsannahme)
$\rightarrow$	$\sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1)$	(Beidseitige Addition erhält Gleichheit)
$\rightarrow$	$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1)$	(Zusammenziehen zu einer Summe)
$\rightarrow$	$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2} + \frac{2\cdot(n+1)}{2}$	(Erweitern mit Faktor 2)
$\rightarrow$	$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2}$	(Zusammenfassen)

- Induktionsschluss: Aus Induktionsanfang und -schritt folgt, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

$\square$

Begriffsklärung Bei vollständigen Induktion werden häufig Begrifflichkeiten wie Induktionsannahme, -voraussetzung, -behauptung, etc. miteinander vermischt. Wir versuchen, etwas Ordnung in diese Begriffe zu bringen.

- *Induktionsanfang*: Erster Teil eines Induktionsbeweises. Beweis, dass $A(1)$ wahr ist.
- *Induktionsschritt*: Zweiter Teil eines Induktionsbeweises. Beweis, dass $A(n{+}1)$ aus $A(n)$ folgt. Alternative Bezeichnung: Schluss von n auf $n+1$.
- *Induktionsannahme*: Die Induktionsannahme ist die Annahme, $A(n)$ sei wahr. Alternative Bezeichnungen: Induktionsvoraussetzung, Induktionshypothese.
- *Induktionsbehauptung*: Die Induktionsbehauptung ist die Behauptung, $A(n{+}1)$ sei wahr, sofern $A(n)$ wahr ist (dass also die Implikation $A(n) \to A(n+1)$ gilt).
- *Induktionsschluss*: Abschließende Bemerkung, dass aus Induktionsanfang und -schritt die zu beweisende All-Aussage $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n)$ folgt. Wird oft weggelassen, da es sich um einen Formalismus handelt.

Aufgabe 2: Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $n = 2m$ oder $n = 2m - 1$.

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $7 \mid (8^n - 1)$.

(e) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} k$.

(f) * Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$.

Erweiterung des Induktionsprinzips

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion lassen sich leicht auch All-Aussagen der Form
$$\forall n \in \mathbb{N}\colon n > n_0 \to A(n)$$
beweisen. Die Aussagen $A(1)$ bis $A(n_0)$ dürfen somit wahr oder falsch sein. Es geht uns nur darum zu zeigen, dass $A(n)$ für alle hinreichend großen $n > n_0$ wahr ist.

Modifikation der Beweisstruktur:

- Induktionsanfang: Wähle $n = n_0 + 1$ statt $n = 1$.
- Induktionsschritt: Betrachte eine beliebige natürliche Zahl $n > n_0$.

Beispiel 3: Für alle natürlichen Zahlen $n > 2$ gilt $2n + 1 < n^2$.

Struktur: $\forall n \in \mathbb{N} \colon n > 2 \to A(n)$

- $A(n) \colon 2n + 1 < n^2$

$\Rightarrow$ $A(n+1) \colon 2(n+1) + 1 < (n+1)^2$

Beobachtung: Offenbar sind die Aussagen $A(1)$ und $A(2)$ falsch, wie folgende Tabelle zeigt:

n	$2n+1$	n^2
1	3	1
2	5	4
3	7	9
4	9	16

Beweis.

- Induktionsanfang: Die Aussage $A(3)$ ist wahr, da $2n + 1 = 7 < 9 = 3^2 = n^2$.
- Induktionsschritt: Sei n eine beliebige natürliche Zahl mit der Eigenschaft $n > 2$.
  - Induktionsannahme: Es gilt $2n + 1 < n^2$.
  - Induktionsbehauptung: Aus $2n + 1 < n^2$ folgt $2(n+1) + 1 < (n+1)^2$.
  - Beweis der Induktionsbehauptung:

	Aussage	**Begründung**
	$2n + 1 < n^2$	(Induktionsannahme)
$\to$	$\exists \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+ \colon n^2 = 2n + 1 + \varepsilon_1$	(Definition „kleiner“)
$\to$	$\exists \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+ \colon n^2 + 2n + 1 = 2n + 1 + \varepsilon_1 + 2n + 1$	(Beids. Add. erhält Gleichheit)
$\to$	$\exists \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+ \colon (n+1)^2 = 2n + 1 + \varepsilon_1 + 2n + 1$	(Erste Binomische Formel)

Im nächsten Schritt nutzen wir aus, dass $n > 1$ gilt, d.h. $\exists \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+ \colon 2n = 2 + \varepsilon_2$.

$\to$	$\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+ \colon (n+1)^2 = 2n + 1 + \varepsilon_1 + 2 + \varepsilon_2 + 1$	$(n > 1)$
$\to$	$\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+ \colon (n+1)^2 = (2n + 2 + 1) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 1$	(Umordnen der Summanden)
$\to$	$\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+ \colon (n+1)^2 = 2(n+1) + 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 1$	$(2(n+1) = 2n + 2)$
$\to$	$\exists \varepsilon_3 \in \mathbb{R}^+ \colon (n+1)^2 = 2(n+1) + 1 + \varepsilon_3$	$(\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 1 \in \mathbb{R}^+)$
$\to$	$2(n+1) + 1 < (n+1)^2$	(Definition „kleiner“)

- Induktionsschluss: Aus Induktionsanfang und -schritt folgt, dass für alle natürlichen Zahlen $n > 2$ gilt: $2n + 1 < n^2$.

□

Aufgabe 3: Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: $\forall n \in \mathbb{N} \colon n > 4 \to n^2 < 2^n$.