Teil 11: Beweis per Kontraposition

Nach dem direkten Beweis und dem Widerspruchsbeweis werden wir nun eine dritte Beweistechnik für All-Aussagen $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n) \to B(n)$ betrachten: Den Beweis per *Kontraposition*.

Ziel: Nachweis einer Aussage $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n) \to B(n)$.

Vorüberlegung:

- Wie die folgende Wahrheitswerttabelle zeigt, ist $A \to B$ äquivalent zu $\overline{B} \to \overline{A}$.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{B} \to \overline{A}$	$A \to B$
W	W	F	F	W	W
W	F	F	W	F	F
F	W	W	F	W	W
F	F	W	W	W	W

- Die Implikation $A \to B$ ist also genau dann wahr, wenn $\overline{B} \to \overline{A}$ wahr ist.
- Um $A \to B$ zu beweisen, können wir stattdessen auch $\overline{B} \to \overline{A}$ beweisen.
- Das kann deutlich einfacher sein!

Beweisstruktur:

- Direkter Beweis der äquivalenten Aussage $\forall n \in \mathbb{N}\colon \overline{B(n)} \to \overline{A(n)}$.
- Ausgangspunkt (*Prämisse*): $A_0(n)\colon n \in \mathbb{N} \wedge \overline{B(n)}$.
- Vorgehen: Ableiten einer Argumentationskette

$$A_0(n) \to A_1(n) \to A_2(n) \to \dots \to \overline{A(n)}.$$

- Alle Zwischenschritte müssen als bewiesen (bzw. begründet) sein.

Beispiel 1: Wir beweisen folgenden Satz.

Satz 1. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn n^2 gerade ist, dann ist n ebenfalls gerade.*

Struktur des Satzes: $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n) \to B(n)$ mit

- $A(n)\colon n^2$ ist gerade.

- $B(n)$: n ist gerade.

$\rightarrow$ $\overline{A(n)}$: n^2 ist ungerade.

$\rightarrow$ $\overline{B(n)}$: n ist ungerade.

Beweis per Kontraposition. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Ausgehend von der Prämisse $A_0(n)$: $n \in \mathbb{N} \wedge \overline{B(n)}$ leiten wir $\overline{A(n)}$ ab:

	Aussage	**Begründung**
	n ist ungerade	(Prämisse)
$\rightarrow$	$\exists m \in \mathbb{N}$: $n = 2m + 1$	(Definition „ungerade“)
$\rightarrow$	$\exists m \in \mathbb{N}$: $n^2 = (2m+1)^2$	(Beidseitiges Quadrieren)
$\rightarrow$	$\exists m \in \mathbb{N}$: $n^2 = 4m^2 + 4m + 1$	(Erste Binomische Formel)
$\rightarrow$	$\exists m \in \mathbb{N}$: $n^2 = 2 \cdot (2m^2 + 2m) + 1$	(Ausklammern eines Faktors 2)
$\rightarrow$	$\exists k \in \mathbb{N}$: $n^2 = 2k + 1$	(Wenn $m \in \mathbb{N}$, dann $k = 2m^2 + 2m \in \mathbb{N}$)
$\rightarrow$	n^2 ist ungerade	(Definition „ungerade“)

$\square$

Bemerkung: Wir haben bereits weiter oben gezeigt, dass der oben gezeigte Zusammenhang in beiden Richtungen gilt. Wir können dies also zusammenfassen zu:

Satz 2. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: n ist genau dann gerade, wenn n^2 gerade ist.*

Aufgabe 1: Könnte man $\forall n \in \mathbb{N}$: $\overline{B(n)} \rightarrow \overline{A(n)}$ auch per Widerspruchsbeweis beweisen?

Aufgabe 2: Beweisen Sie folgende Aussagen per Kontraposition:

(a) Für alle $m, n, k \in \mathbb{N}$: $(m \neq n) \rightarrow (m + k \neq n + k)$.

(b) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$: $(mn > 100) \rightarrow (m > 10) \vee (n > 10)$.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn n prim ist, dann ist $n = 2$ oder n^2 ist nicht gerade.

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn n^2 ungerade ist, dann ist n ungerade.

(e) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$: $(c \nmid ab) \rightarrow (c \nmid a) \wedge (c \nmid b)$