Teil 12: Potenzen und Wurzeln

1 Potenzen

Eine Potenz ist eine abkürzende Schreibweise für die wiederholte Multiplikation.

Notation: $y = a^b$

Sprechweise:

- „a hoch b"
- „b-te Potenz von a"

Bedeutung der Variablen:

- a: Basis
- b: Exponent
- y: Potenz(wert)

1.1 Definition

Die Definition der Potenz richtet sich nach dem Typ des Exponenten.

1.1.1 Natürlicher Exponent

Ist b eine natürliche Zahl (inklusive 0), so gilt für beliebige $a \in \mathbb{R}$:

$$a^b = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b \text{ Faktoren}}$$

Beispiel 1:

$$2^5 = 1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5 \text{ Faktoren}} = 32.$$

Beispiel 2:

$$(2/5)^0 = 1.$$

1.1.2 Negativer Exponent

Ist b eine negative ganze Zahl, so gilt für beliebige reelle $a \neq 0$:

$$a^{-b} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b \text{ Divisoren}}} = \frac{1}{a^b}.$$

Beispiel 3:

$$2^{-3} = \frac{1}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ Divisoren}}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

Anmerkungen:

- Für $a = 0$ nicht definiert (Division durch Null).

1.1.3 Gebrochener Exponent

Ist $b = m/n$ für zwei ganze Zahlen m und n, so gilt für beliebige positive reelle Zahlen a :

$$a^b = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Beispiel 4:

$$8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

Anmerkungen:

- Für $a < 0$ nicht definiert. (Siehe Abschnitt zu Wurzeln.)

1.1.4 Reeller Exponent

Ist b eine reelle Zahl, so sind Potenzen ebenfalls wohldefiniert. Details übersteigen jedoch den Rahmen dieses Vorkurses.

Aufgabe 1: Berechnen Sie!

(a) $3^2 + 4^{3/2}$

(b) $\sum_{k=0}^{3} k^2$

(c) $\sum_{k=0}^{3} 2^{-k}$

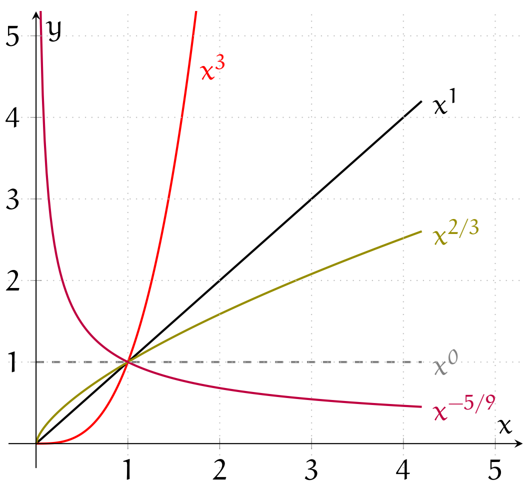
(d) $(\sqrt{2})^{1+5}$

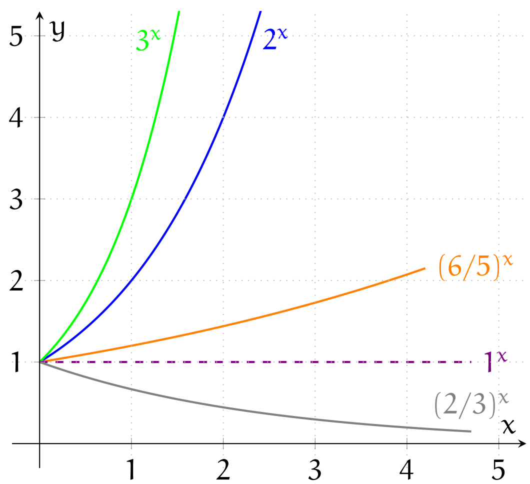
1.2 Potenzieren vs. Exponentiation

Man unterscheidet mitunter zwischen den Rechenoperationen *Potenzieren* und der *Exponentiation*. Im Prinzip besteht aus mathematischer Sicht kein Unterschied. (Es gelten dieselben Rechnenregeln.) Der Unterschied besteht nur darin, ob die Basis konstant oder variabel ist.

Sei x eine Variable, c eine Konstante und y die zu berechnende unbekannte Größe.

- Potenzieren: Berechnung von $y = x^c$. Beispiel: $y = x^2$.
- Exponentiation: Berechnung von $y = c^x$. Beispiel: $y = 2^x$.
- Achtung: Im Allgemeinen ist $c^x \neq x^c$! Beispiel: $2^3 = 8 \neq 9 = 3^2$.





2 Wurzeln

Wurzeln sind Potenzen der Form $x^{1/n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Notation: $y = \sqrt[n]{x}$

Sprechweise

- „n-te Wurzel von x"
- Für $n = 2$: „(Quadrat-) Wurzel von x"

2.1 Definition

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle reellen Zahlen $x > 0$ ist die *n-te Wurzel von x* definiert als $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

Beobachtung:

- Wurzeln sind spezielle Potenzen.

$\Rightarrow$ Rechenregeln für Potenzen gelten auch für Wurzeln.

2.2 Rechenoperation: Wurzelziehen (Radizieren)

- Berechnung von $y = \sqrt[c]{x} = x^{1/c}$. (c ist konstant.)
- Äquivalent: Bestimme das y, für das gilt: $y^c = x$.
- Umkehroperation zum Potenzieren.

Beispiel 5: $y = \sqrt[3]{8} = 2$, weil $2^3 = 8$.

Beispiel 6: $y = \sqrt{2} = 1,41421....$

Anmerkungen

- Quadratwurzeln negativer Zahlen können durch die Einführung der imaginären Einheit i gelöst werden. ⇒ Vorlesung Mathematik B im 1. Semester.
- Wurzelberechnung: Newton-Verfahren, Bisektionsverfahren, Satz von Vieta, etc.

3 Potenzgesetze

Überall dort, wo alle vorkommenden Ausdrücke definiert sind, gelten die folgenden Gesetze.

$$
\begin{aligned}
(x \cdot y)^b &= x^b \cdot y^b && \text{(Potenzen von Produkten)} \\
\left(\frac{x}{y}\right)^b &= \frac{x^b}{y^b} && \text{(Potenzen von Quotienten)} \\
\left(a^b\right)^c &= a^{b \cdot c} && \text{(Potenzen von Potenzen)} \\
x^{b+c} &= x^b \cdot x^c && \text{(Multiplikation von Potenzen gleicher Basis)} \\
x^{b-c} &= \frac{x^b}{x^c} && \text{(Division von Potenzen gleicher Basis)}
\end{aligned}
$$

Potenzen von Produkten Warum gilt das? Zur Illustration ein Beispiel für $b \in \mathbb{N}$:

$$(x \cdot y)^b = \underbrace{(x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot \ldots \cdot (x \cdot y)}_{b \text{ Faktoren}} = \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{b \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(y \cdot y \cdot \ldots \cdot y)}_{b \text{ Faktoren}} = x^b \cdot y^b.$$

Aufgabe 2: Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke durch Anwendung der Potenzgesetze!

(a) $\left(x^2\right)^{2+3} \cdot \left(x^{-5}\right)^{2-5}$

(b) $(p+q)^2 \cdot (p-q)^2$

(c) $\dfrac{6^5 \cdot 14^4 \cdot 15^3}{10^2 \cdot 12^3 \cdot 21^4}$

(d) $\sqrt{x \cdot \sqrt[8]{x^3}} \cdot \left(\sqrt[16]{x}\right)^5$

(e) $\dfrac{(ax)^{-2}}{(by)^3} \cdot \dfrac{(abx)^2}{y^{-3}}$

(f) $\dfrac{a\sqrt[3]{b^2} + b\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2b^2}}$