Teil 13: Logarithmen

1 Einführung und Notation

Der Logarithmus $\log_b x$ ist die Umkehrung zur Exponentation b^x.

Notation: $y = \log_b x$

Sprechweise:

- „y ist der Logarithmus von x zur Basis b."

Bedeutung der Variablen

- b: Basis

Definition 1. *Für alle positiven reellen Zahlen* b *und* x *bezeichnet der Logarithmus* $\log_b x$ *diejenige reelle Zahl* y*, für die* $b^y = x$ *gilt, sofern diese existiert.*

Aus der Definition folgt:

$$y = \log_b x \ \leftrightarrow \ b^y = x.$$

Beispiel 1: $\log_7 49 = 2$. Es gilt $7^2 = 49$.

Beispiel 2: $\log_2(1/8) = -3$. Es gilt $2^{-3} = 1/2^3 = 1/8$.

Aufgabe 1: Berechnen Sie ohne Taschenrechner. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $\log_3 9$

(b) $\log_4 0,25$

(c) $\log_{25} 5$

(d) $\log_{1,6} 1$

Anmerkungen:

- Aus der Definition folgt sofort $b^{\log_b x} = x$.

  $\Rightarrow$ Logarithmus- und Exponentialfunktion sind *Umkehrfunktionen*.

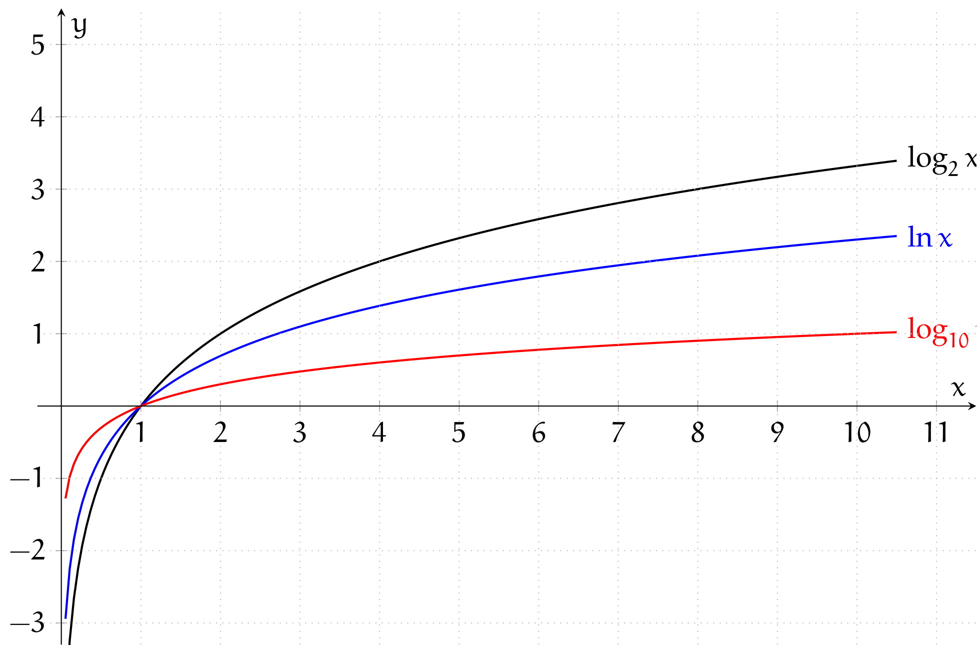
- Wichtige Spezialfälle: $\log_b b = 1$ und $\log_b 1 = 0$.
- Für $x \leq 0$ ist der Logarithmus nicht definiert.

2 Wichtige Spezialfälle

In der Informatik spielen folgende Basen b eine herausragende Rolle:

$$
\begin{aligned}
\log_{10} x &= \lg x && \text{(Zehner-Logarithmus)} \\
\log_e x &= \ln x && \text{(natürlicher Logarithmus)} \\
\log_2 x & && \text{(Zweier-Logarithmus)}
\end{aligned}
$$

Die Basis des natürlichen Logarithmus ist die Eulersche Zahl $e = 2,718281...$.



3 Rechenregeln

Durch die Umkehrung der Potenzgesetze erhalten wir folgende Rechenregeln für Logarithmen: Für beliebige $b, c > 1, x, y > 0$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\log_b(x \cdot y) &= \log_b x + \log_b y && \text{(Logarithmus von Produkten)} \\
\log_b\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_b x - \log_b y && \text{(Logarithmus von Quotienten)} \\
\log_b x^c &= c \cdot \log_b x && \text{(Logarithmus von Potenzen)} \\
\log_b x &= \frac{\log_c x}{\log_c b} && \text{(Basistransformation).}
\end{aligned}
$$

Basistransformation Die Regel zur Basistransformation wollen wir beweisen.

Beweis. Seien $x, b, c > 0$ beliebige reelle Zahlen. Wir betrachten den

$$\frac{\log_c x}{\log_c b}$$

und überführen diesen mit Hilfe der oben genannten Rechenregeln in den Ausdruck $\log_b x$. Dazu nutzen wir die Definition

$$y = \log_b x \qquad \leftrightarrow \qquad b^y = x.$$

Wir erhalten:

$$\frac{\log_c x}{\log_c b} = \frac{\log_c b^y}{\log_c b} = \frac{y \cdot \log_c b}{\log_c b} = y = \log_b x.$$

$\square$

Nachdem wir uns überzeugt haben, dass die Basistransformationsregel gilt, schauen wir uns eine wichtige Anwendung der Basistransformation an.

Vorüberlegung:

- Seien $b, c > 1$ beliebige reelle Zahlen. Durch Anwendung der Rechenregeln gilt:

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b} = \frac{\log_c x}{\frac{\log_b b}{\log_b c}} = \frac{\log_b c \cdot \log_c x}{\log_b b} = \log_b c \cdot \log_c x.$$

Anwendung: Umrechnung vom Zweier- in den Zehnerlogarithmus. Hier: $b = 2$, $c = 10$.

$$\log_2 x = \log_2 10 \cdot \log_{10} x \approx 3,322 \cdot \log_{10} x.$$

Wie oben an der Grafik ersichtlich ist, unterscheidet sich der Zweier- vom Zehnerlogarithmus also nur durch einen konstanten Faktor.

Tipp: Der Umrechnungsfaktor $\log_2 10 \approx 3,322$ ist in vielen Anwendungen nützlich!

Beispiel 3:

$$\log_2 100 \approx 3,322 \cdot \log_{10} 100 = 3,322 \cdot 2 = 6,644.$$

Aufgabe 2: Werten Sie (ohne Taschenrechner) folgende Ausdrücke aus!

(a) $\log_{27} 9$

(b) $\log_2 \dfrac{1}{\sqrt{9} + 13}$

(c) $\log_6 8 + \log_6 27$

(d) $\dfrac{\log_7 16}{\log_7 8}$

* (e) $\log_4 \left(\prod_{k=3}^{31} (2k)^2 \right) - \sum_{i=2}^{32} \log_2 i$

Tipp: Basistransformation!

Aufgabe 3: Fassen Sie zu einem einzigen Logarithmus $\ln \ldots$ zusammen!

Es seien u, v, x positive reelle Zahlen.

(a) $2 \ln u + 3 \ln v$

(b) $\ln(u + v) + \ln(u + v)^2 - \dfrac{\ln u}{2} - 2 \ln v$

(c) $\dfrac{(\ln x) + 2}{3}$

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{27} \ln(i)$

Aufgabe 4: Papier Falten

Faltet man ein Blatt Papier im DIN A4 Format (Flächeninhalt $1/16\ \mathrm{m}^2 = 625\ \mathrm{cm}^2$) in der Mitte, halbiert sich der Flächeninhalt des Blattes. Wir gehen nun davon aus, dass sich das entstandene Blatt halber Größe beliebig oft weiter falten lässt.

(a) Wie oft kann man ein A4 Blatt in der Mitte falten, bis das verbleibene Blatt einen Flächeninhalt von weniger als $1\ \mathrm{cm}^2$ besitzt?

(b) Welchen Flächeninhalt muss ein Blatt haben, damit es auch nach 14 Faltungen noch einen Flächeninhalt von $1\ \mathrm{cm}^2$ oder mehr besitzt? Welche Seitenlängen hätte ein solches Blatt, wenn es (wie im DIN A Format) ein Seitenverhältnis von $1 : \sqrt{2}$ besitzt?

(c) Angenommen, ein Blatt hat ursprünglich eine Dicke von 0,1 mm. Wie oft muss man das Blatt falten, damit dieses bis zum Mond reicht (384.400 km)? Wie oft bis zum sonnennächsten Stern Proxima Centauri ($4{,}106 \cdot 10^{13}$ km)?

Aufgabe 5: Berechnung von Logarithmen

(a) Leiten Sie aus den Logarithmengesetzen folgende Rekursionsgleichung her:

$$\log_b x = \begin{cases} 1 + \log_b(x/b), & \text{falls } x \geq b, \\ 1/\log_x b, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Entwickeln Sie daraus einen rekursiven Algorithmus Log zur Berechnung der Logarithmusfunktion $\log_b x$. (Eingabe: $b, x > 0$)

(c) Verwenden Sie Ihren Algorithmus um $\log_2 5$ zu berechnen.