



## Teil 1: Summen

### 1 Einführung und Notation

Summen über endliche (oder unendliche) Zahlenfolgen sind ein elementares Konzept in vielen Bereichen der Informatik. Eine Summe besteht aus einer Folge von *Summanden*.

**Beispiel 1:** Die folgende Summe hat 5 Summanden (und den Wert 150).

$$10 + 20 + 30 + 40 + 50 = 150$$

- Im Beispiel hat der erste Summand den Wert 10, der zweite den Wert 20 und so weiter.
- Typischerweise lassen sich die Summanden in Abhängigkeit einer *Laufvariable*  $k$  beschreiben.
- Der Wert des Summanden zur Laufvariable  $k$  wird mit  $a_k$  bezeichnet.
- Im Beispiel kann man als Laufvariable  $k = 1, \dots, 5$  verwenden.
- Die Summanden haben dann die Form  $a_k = 10k$ .

In kompakter Form wird eine Summe über folgende Notation beschrieben:

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n.$$

#### Bedeutung

- Laufvariable  $k$ : durchläuft alle ganzen Zahlen vom *Startwert* bis zum *Endwert* einmal.
- Startwert  $m$ : kleinster Wert für die Laufvariable  $k$ .
- Endwert  $n$ : größter Wert für die Laufvariable  $k$ .
- Summand  $a_k$ : Summanden in Abhängigkeit der Laufvariable  $k$ .

Die Summe aus Beispiel 1 in Summennotation:

$$\sum_{k=1}^5 10k = 10 + 20 + 30 + 40 + 50 = 150.$$

Hier ist der Startwert  $m = 1$ , der Endwert  $n = 5$ . Die Summanden haben die Form  $a_k = 10k$ .

**Aufgabe 1:** Wie viele Summanden hat eine Summe mit Startwert  $m$  und Endwert  $n$ ?

**Hinweis:** Die Form der Summe ist nicht eindeutig. Wir können die Summe aus Beispiel 1 unter Verwendung anderer Start- und Endwerte beispielsweise auch schreiben als:

$$\sum_{k=2}^6 (10k - 10) = (20 - 10) + (30 - 10) + (40 - 10) + (50 - 10) + (60 - 10) = 150.$$

Hier ist  $m = 2$  und  $n = 6$ . Die Summanden haben die Form  $a_k = 10k - 10$ .

**Aufgabe 2:** Schreiben Sie folgende Summen in expliziter Form und werten Sie diese aus!

(a)  $\sum_{k=1}^5 k^2$

(b)  $\sum_{k=-1}^3 (2k - 1)$

(c)  $\sum_{i=0}^3 (-1)^i$

(d)  $\sum_{i=12}^{15} |i - 14|$

**Aufgabe 3:** Schreiben Sie unter Verwendung von Summenzeichen!

(a)  $3 + 6 + 9 + 12 + 15$

(b)  $-3 - 6 - 9 - 12 - 15$

(c)  $2 + 2 + 2 + 2 + 2$

(d)  $5 + 12 + 19 + 26 + 33 + 40 + 47 + 54 + 61$

(e) Die Summe der ersten  $n$  ungeraden natürlichen Zahlen

(f)  $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8$

## 2 Rechenregeln

Summen können durch Anwendung von Rechenregeln ohne großen Rechenaufwand ausgewertet werden. Im Folgenden bezeichnen  $m, n \in \mathbb{N}$  natürliche Start- und Endwerte sowie  $a_k, b_k, c \in \mathbb{R}$  reellwertige Summanden in Abhängigkeit von einer Laufvariable  $k \in \mathbb{Z}$ .

## 2.1 Abspalten und Einziehen von Summanden:

Wir können eine Summe in zwei (oder mehr) Summen aufspalten. Dazu wählen wir eine beliebige ganze Zahl  $i$  als neuen Endwert (und  $i + 1$  als neuen Startwert). Es gilt:

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^i a_k + \sum_{k=i+1}^n a_k.$$

**Beispiel 2:** Hier ist  $m = 1$ ,  $n = 9$ ,  $a_k = k^2$  und  $i = 4$ .

$$\sum_{k=1}^9 k^2 = \sum_{k=1}^4 k^2 + \sum_{k=5}^9 k^2.$$

Warum gilt die Regel?

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n a_k &= a_m + \dots + a_i + a_{i+1} + \dots + a_n && \text{(Ausschreiben)} \\ &= (a_m + \dots + a_i) + (a_{i+1} + \dots + a_n) && \text{(Setzen von Klammern)} \\ &= \sum_{k=m}^i a_k + \sum_{k=i+1}^n a_k. && \text{(Zusammenfassen)} \end{aligned}$$

Von besonderer Bedeutung ist das Abspalten des ersten (oder letzten) Summanden:

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + \sum_{k=m+1}^n a_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^{n-1} a_k + a_n.$$

*Hinweis:* Selbstverständlich gilt die Regel in beide Richtungen. Das heißt:

$$\sum_{k=m}^i a_k + \sum_{k=i+1}^n a_k = \sum_{k=m}^n a_k.$$

**Aufgabe 4:** Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke!

(a)  $\left(\sum_{k=1}^5 k\right) + \left(\sum_{k=6}^{10} k\right)$

(b)  $\left(\sum_{k=1}^5 k^2\right) + \left(\sum_{k=5}^{10} k^2\right)$

(c)  $\left(\sum_{k=1}^{10} k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^4 k^2\right)$

## 2.2 Assoziativität

Für beliebige Summanden der Form  $a_k + b_k$  gilt:

$$\sum_{k=m}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k.$$

**Beispiel 3:** Hier:  $a_k = k$  und  $b_k = 2$ .

$$\sum_{k=1}^{10} (k + 2) = \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 2.$$

Warum gilt Assoziativität?

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n (a_k + b_k) &= (a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \dots + (a_n + b_n) && \text{(Ausschreiben der Summe)} \\ &= a_m + b_m + a_{m+1} + b_{m+1} + \dots + a_n + b_n && \text{(Weglassen von Klammern)} \\ &= a_m + a_{m+1} + \dots + a_n + b_m + b_{m+1} + \dots + b_n && \text{(Umordnen der Summanden)} \\ &= (a_m + a_{m+1} + \dots + a_n) + (b_m + b_{m+1} + \dots + b_n) && \text{(Neue Klammern)} \\ &= \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k. \end{aligned}$$

*Achtung:* Im Allgemeinen ist jedoch:

$$\sum_{k=m}^n a_k \cdot b_k \neq \left( \sum_{k=m}^n a_k \right) \cdot \left( \sum_{k=m}^n b_k \right).$$

**Aufgabe 5:** Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke!

- (a)  $\sum_{k=1}^5 (10k + 2)$
- (b)  $\left( \sum_{k=1}^5 (2 - k) \right) + \left( \sum_{k=1}^5 k \right) - \left( \sum_{k=1}^5 2 \right)$
- (c)  $\sum_{k=0}^{11} (4k^2 + 1) - \sum_{k=0}^{11} (3k^2 - 2k)$

**Aufgabe 6:** Sind folgende Umformungen korrekt?

- (a)  $\sum_{k=1}^{10} 3k = \sum_{k=2}^9 3k + 33$
- (b)  $\sum_{k=1}^{10} 3k = \left( \sum_{k=1}^{10} 3 \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^{10} k \right)$
- (c)  $\sum_{k=1}^{10} (3k + 4) = \left( \sum_{k=1}^{10} 3k \right) + \left( \sum_{k=1}^{10} 4 \right)$

### 2.2.1 Distributivgesetz

Sei  $c \in \mathbb{R}$  eine beliebige Konstante. *Achtung:* Die Konstante  $c$  darf nicht von  $k$  abhängen!

$$\sum_{k=m}^n c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=m}^n a_k.$$

**Beispiel 4:** Hier ist  $a_k = k$  und  $c = 2$ . Da der Faktor 2 nicht von  $k$  abhängt, können wir diesen aus der Summe ausklammern.

$$\sum_{k=1}^{10} 2k = 2 \cdot \sum_{k=1}^{10} k.$$

Warum gilt das Gesetz?

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n c \cdot a_k &= c \cdot a_m + c \cdot a_{m+1} + \dots + c \cdot a_n && \text{(Ausschreiben)} \\ &= c \cdot (a_m + a_{m+1} + \dots + a_n) && \text{(Ausklammern von } c) \\ &= c \cdot \sum_{k=m}^n a_k && \text{(Zusammenfassen).} \end{aligned}$$

Wichtiger Spezialfall: Summen von Konstanten:

$$\sum_{k=m}^n c = c \cdot \sum_{k=m}^n 1 = c \cdot \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{n-m+1 \text{ Summanden}} = c \cdot (n - m + 1).$$

**Beispiel 5:**

$$\sum_{k=0}^n 2 = 2 \cdot (n + 1) = 2n + 2.$$

**Aufgabe 7:** Werten Sie folgende Summen aus!

(a)  $\frac{1}{c} \cdot \sum_{k=1}^{50} 2c$

(b)  $\sum_{i=1}^{50} (4i + 3i^2 - 20) + \sum_{i=1}^{50} (3i - 4i^2 + 10) - \sum_{i=1}^{50} (30 + 7i - i^2)$

(c)  $\sum_{l=4}^{10} (l^3 - 3l^2 + 20) - \sum_{l=3}^{10} (-3l^2 + l^3 + 18)$

## 2.3 Indexverschiebung:

Für beliebige  $r \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m-r}^{n-r} a_{k+r}.$$

Wir können die Summanden der Form  $a_k$  durch  $a_{k+r}$  ersetzen, indem wir alle Vorkommen der Laufvariable  $k$  durch  $(k+r)$  ersetzen.

**Beispiel 6:** Hier ist  $a_k = 10k$ , das heißt  $a_{k+r} = 10 \cdot (k+r) = 10k + 10r$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=21}^{25} 10k &= \sum_{k=1}^5 (10k + 200) && \text{(Indexverschiebung: } r = 20) \\ &= \sum_{k=1}^5 10k + \sum_{k=1}^5 200 && \text{(Assoziativität)} \\ &= \sum_{k=1}^5 10k + 200 \cdot 5 && \text{(Summen von Konstanten)} \\ &= 10 \sum_{k=1}^5 k + 200 \cdot 5 && \text{(Distributivität)} \\ &= 10 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) + 200 \cdot 5 && \text{(Explizite Form)} \\ &= 10 \cdot 15 + 200 \cdot 5 && \text{(Vereinfachen)} \\ &= 150 + 1000 && \text{(Vereinfachen)} \\ &= 1150 && \text{(Vereinfachen)} \end{aligned}$$

Warum gilt die Regel?

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n a_k &= a_m + a_{m+1} + \dots + a_n && \text{(Ausschreiben)} \\ &= a_{m+(r-r)} + a_{m+1+(r-r)} + \dots + a_{n+(r-r)} && (r-r=0) \\ &= a_{(m-r)+r} + a_{(m-r+1)+r} + \dots + a_{(n-r)+r} && \text{(Summanden umordnen)} \\ &= \sum_{k=m-r}^{n-r} a_{k+r}. && \text{(Zusammenfassen)} \end{aligned}$$

**Aufgabe 8:** Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke!

(a)  $\sum_{k=11}^{15} (k-10)$

(b)  $\sum_{k=9}^{17} (k-6)^2 - \sum_{k=1}^7 (k+2)^2$

$$(c) \sum_{k=1}^{10} (k+2)^4 - \sum_{k=1}^{12} k^4$$

$$(d) \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k} + \sum_{k=12}^{30} \frac{1}{10-k}$$

$$(e) \sum_{k=7}^{89} k \cdot (k-2)^3 - \sum_{k=5}^{87} (k^4 + 2k^3)$$

### 3 Besonderheiten

Folgende Besonderheiten im Umgang mit Summen sollte man kennen.

#### 3.1 Leere Summe

Für  $m > n$  definiert man:

$$\sum_{k=m}^n a_k = 0.$$

**Beispiel 7:**

$$\sum_{k=10}^5 2k = 0.$$

#### 3.2 Teleskop-Summe

Eine Teleskopsumme hat die Form

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^n (b_k - b_{k+1}) = b_m - b_{n+1}.$$

Kann man die Summandenform  $a_k$  also als Differenz  $b_k - b_{k+1}$  zweier von  $k$  abhängiger Ausdrücke darstellen, so kann man die Summe sehr leicht auswerten.

**Beispiel 8:** Im folgenden Beispiel ist  $a_k = k^2 - (k+1)^2$ , d. h.  $b_k = k^2$ .

$$\sum_{k=3}^9 (k^2 - (k+1)^2).$$

Es folgt:

$$\sum_{k=3}^9 (k^2 - (k+1)^2) = 3^2 - (9+1)^2 = 9 - 100 = -91.$$

**Aufgabe 9:** Leiten Sie die Regel

$$\sum_{k=m}^n (b_k - b_{k+1}) = b_m - b_{n+1}$$

zur Auswertung von Teleskop-Summen aus den anderen Rechenregeln her!

### 3.3 Gaußsche Summenformel

Die Summe der ersten  $n$  natürlichen Zahlen taucht in vielen Anwendungen auf. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}.$$

**Beispiel 9:**

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 10k &= 10 \sum_{k=1}^5 k && \text{(Distributivität)} \\ &= 10 \cdot \frac{5^2 + 5}{2} && \text{(Gaußsche Summenformel)} \\ &= 10 \cdot 15 && \text{(Vereinfachen)} \\ &= 150. \end{aligned}$$

Für Fortgeschrittene: Warum gilt die Regel? Dazu führen wir einen etwas längeren Beweis.

Wir starten mit

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= 1 + 2 + \dots + n \\ &= n + (n - 1) + \dots + 1 && \text{(Umkehren der Summationsreihenfolge)} \\ &= \sum_{k=1}^n (n + 1 - k) && \text{(Überführen in Summenform)} \\ &= \sum_{k=1}^n n + \sum_{k=1}^n 1 - \sum_{k=1}^n k && \text{(Assoziativitätsgesetz)} \\ &= n^2 + n - \sum_{k=1}^n k. && \text{(Summen von Konstanten)} \end{aligned}$$

Zusammenfassend haben wir bisher folgenden Zusammenhang nachgewiesen:

$$\sum_{k=1}^n k = n^2 + n - \sum_{k=1}^n k.$$



Addieren wir den Term  $\sum_{k=1}^n k$  auf beiden Seiten der Gleichung, erhalten wir

$$\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k = n^2 + n - \underbrace{\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k}_{=0},$$

was wir vereinfachen können zu

$$2 \cdot \sum_{k=1}^n k = n^2 + n.$$

Teilen wir schließlich beide Seiten der Gleichung durch 2, erhalten wir das Ergebnis:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n^2 + n}{2}.$$

**Aufgabe 10:** Werten Sie (durch Anwendung der Rechenregeln) folgende Summen aus!

(a)  $\sum_{k=1}^{10} 2k$

(b)  $\sum_{k=4}^{10} k$

(c)  $\sum_{k=10}^{29} (3k - 2)$

**Aufgabe 11:** \* Partialsummen geometrischer Reihen.

Seien  $c$  und  $x \neq 1$  beliebige reelle Zahlen. Zeigen Sie durch Anwendung der Rechenregeln für Summen, dass folgender Zusammenhang für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt:

$$\sum_{k=0}^n cx^k = \frac{c - cx^{n+1}}{1 - x}.$$

## 4 Doppelsummen

Manchmal sind Summanden von zwei (oder mehr) Laufvariablen abhängig.

$$\sum_{i=m}^n \sum_{j=l}^r a_{ij} = \sum_{i=m}^n \left( \sum_{j=l}^r a_{ij} \right)$$

In der inneren Summe wird der Wert der äußeren Laufvariable  $i$  als konstant erachtet.

$$\sum_{i=m}^n \sum_{j=l}^r a_{ij} = \underbrace{(a_{ml} + \dots + a_{mr})}_{i=m} + \underbrace{(a_{(m+1)l} + \dots + a_{(m+1)r})}_{i=m+1} + \dots + \underbrace{(a_{nl} + \dots + a_{nr})}_{i=n}.$$

**Beispiel 10:**

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^4 (i+j) = \underbrace{(1+2) + (1+3) + (1+4)}_{i=1} + \underbrace{(2+3) + (2+4)}_{i=2} + \underbrace{(3+4)}_{i=3} = 30$$

Die äußere Summe hat 3 Summanden der Form  $a_i = \sum_{j=i+1}^4 (i+j)$ . Jeder Summand ist selbst eine Summe mit Startwert  $l = i + 1$ , Endwert  $r = 4$  und Summanden der Form  $a_{ij} = i + j$ .

**Beispiel 11:**

$$\sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^8 (i-j)$$

Hier ist  $m = 7$  und  $n = 8$ . Die äußere Summe hat also 7 Summanden der Form  $a_i = \sum_{j=1}^8 (i-j)$ . Jeder Summand ist also selbst wieder eine Summe mit Startwert  $l = 1$ , Endwert  $r = 8$  und Summanden der Form  $a_{ij} = i - j$ .

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^8 (i-j) &= \sum_{i=1}^7 \left( \sum_{j=1}^8 (i-j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^7 \left( \sum_{j=1}^8 i - \sum_{j=1}^8 j \right) && \text{(Assoziativitätsgesetz)} \\ &= \sum_{i=1}^7 \left( 8i - \sum_{j=1}^8 j \right) && \text{(Summen von Konstanten)} \\ &= \sum_{i=1}^7 \left( 8i - \frac{8 \cdot 9}{2} \right) && \text{(Gaußsche Summenformel)} \\ &= \sum_{i=1}^7 (8i - 36) && \text{(Vereinfachen)} \\ &= \sum_{i=1}^7 8i - \sum_{i=1}^7 36 && \text{(Assoziativitätsgesetz)} \\ &= 8 \cdot \sum_{i=1}^7 i - 36 \cdot \sum_{i=1}^7 1 && \text{(Distributivitätsgesetz)} \\ &= 8 \cdot \frac{7 \cdot 8}{2} - 36 \cdot 7 && \text{(Summen von Konstanten)} \\ &= 8 \cdot 7 \cdot 4 - 36 \cdot 7 && \text{(Vereinfachen)} \\ &= 7 \cdot (8 \cdot 4 - 36) && \text{(Ausklammern von 7)} \\ &= 7 \cdot -4 && \text{(Vereinfachen)} \\ &= -28. \end{aligned}$$

**Aufgabe 12:** Vereinfachen Sie folgende Summen!

(a)  $\sum_{i=11}^{16} \sum_{j=1}^5 ij$

(b)  $\sum_{i=1}^{131} \sum_{j=2i}^5 (i-j)^2$