Teil 4: Zahlendarstellung

In diesem Kapitel behandeln wir die Darstellung von positiven ganzen Zahlen in verschiedenen Zahlensystemen. Dabei unterscheiden wir zwischen

- einer ganzen Zahl (als abstraktes mathematisches Objekt), sowie
- deren Darstellung in einem Zahlensystem (als Ziffernfolge).

Ein ganze Zahl kann auf verschiedene Weisen dargestellt werden. So beschreiben die Ziffernfolgen $(101000000100)_2$, $(A04)_{16}$ und 2564 dieselbe Zahl im Binärsystem, Hexadezimalsystem und Dezimalsystem.

1 Dezimalsystem

In unserem vertrauten Dezimalsystem stellen wir Zahlen mit Hilfe von 10 Ziffern dar:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Eine (positive ganze) Zahl a wird in diesem Zahlensystem dargestellt aus einer Folge

$$a_{k-1} a_{k-2} \dots a_1 a_0$$

von Ziffern $a_i \in \{0, \dots, 9\}$, wobei k die Anzahl der verwendeten Ziffern beschreibt.

Beispiel 1: $a = 2654$ hat die $k = 4$ Ziffern $a_3 = 2$, $a_2 = 6$, $a_1 = 5$, $a_0 = 4$.

Die Position der Ziffern beschreibt deren *Wertigkeit*. Die Ziffer a_0 wird *niedrigstwertig* genannt, a_{k-1} *höchstwertig*. Der Wert einer Zahl a im Dezimalsystem kann aus deren Ziffern errechnet werden mittels der Gleichung:

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=0}^{k-1} a_i 10^i \\ &= a_{k-1} 10^{k-1} + a_{k-2} 10^{k-2} + \dots + a_1 10^1 + a_0 10^0 \\ &= a_{k-1} 10^{k-1} + a_{k-2} 10^{k-2} + \dots + a_1 10 + a_0. \end{aligned}$$

Beispiel 2: $2654 = 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4$

Aufgabe 1: Entwickeln Sie einen Algorithmus ADD zur Addition zweier positiver ganzer Zahlen a und b im Dezimalsystem. Die Zahlen seien gegeben als Ziffernfolgen

$$a_{k-1}a_{k-2}\dots a_1a_0 \qquad \text{und} \qquad b_{k-1}b_{k-2}\dots b_1b_0.$$

Ausgabe des Algorithmus soll eine Ziffernfolge $c_kc_{k-1}\dots c_1c_0$ mit $k+1$ Ziffern sein.

2 Stellenwertsysteme

Das Dezimalsystem können wir leicht verallgemeinern zu einem b-adischen Stellenwertsystemen mit $b \geq 2$ verschiedenen Ziffern

$$0, 1, \dots b-1.$$

Beispiel 3: Im 3-adischen Stellenwertsystem (mit $b = 3$) gibt es die Ziffern $0, 1, 2$.

Beispiel 4: Im 12-adischen Stellenwertsystem (mit $b = 12$) gibt es die „Ziffern"

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B$$

wobei A und B hier als Ziffern mit dem Wert 10 und 11 zählen.

Um Missverständnisse zu vermeiden, kennzeichnen wir Ziffernfolgen

$$(a_{k-1}a_{k-2}\dots a_1a_0)_b$$

im b-adischen Zahlensystem für $b \neq 10$ mit dem dazugehörigen b, zum Beispiel $(2654)_{12}$. **Ziffernfolgen ohne diese Kennzeichnung sind immer im Dezimalsystem dargestellt.**

Analog zum Dezimalsystem ergibt sich der Wert einer Ziffernfolge $(a_{k-1}a_{k-2}\dots a_1a_0)_b$ als

$$a = \sum_{i=0}^{k-1} a_i b^i. \tag{1}$$

3 Umrechnung ins Dezimalsystem

Wollen wir eine gegebene Zahl $(a_{k-1}a_{k-2}\dots a_1a_0)_b$ ins Dezimalsystem umrechnen, so überführen wir zunächst jede Ziffer a_i ins Dezimalsystem und werten dann Gleichung (1) aus.

Beispiel 5:

$$(2654)_7 = 2 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7^1 + 4 \cdot 7^0 = 1019$$

Beispiel 6:

$$(BA5)_{12} = 11 \cdot 12^2 + 10 \cdot 12^1 + 5 \cdot 12^0 = 1709$$

Aufgabe 2: Wandeln Sie ins Dezimalsystem um:

(a) $(1011)_2$

(b) $(1234)_5$

(c) $(1A2B)_{12}$

Anmerkungen:

- Das hier beschriebene Vorgehen zur Auswertung einer Ziffernfolge ist vergleichsweise rechenaufwändig, da wir die Potenzen b^i berechnen müssen.

3.1 Horner-Schema

Alternativ zu oben beschriebenen Verfahren können wir den Wert einer Ziffernfolge

$$(a_{k-1}a_{k-2}\dots a_1a_0)_b$$

über das *Horner-Schema* berechnen. Dazu zunächst ein paar Vorüberlegungen:

Vorüberlegung:

- Durch Anwendung der bekannten Rechenregeln auf Gleichung (1) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
a &= \sum_{i=0}^{k-1} a_i b^i && \text{(Gleichung (1))}\\
&= \sum_{i=1}^{k-1} a_i b^i + a_0 && \text{(Abspalten des Summanden } a_0\text{)}\\
&= \sum_{i=0}^{k-2} a_{i+1} b^{i+1} + a_0 && \text{(Indexverschiebung um } r = 1\text{)}\\
&= b\sum_{i=0}^{k-2} a_{i+1} b^{i} + a_0 && \text{(Ausklammern eines Faktors } b\text{)}
\end{aligned}$$

- Bei genauem Hinsehen fällt uns auf, dass die verbleibende Summe dem Wert der Ziffernfolge $a_{k-1}a_{k-2}\dots a_1$ in b-adischer Darstellung entspricht. Wir bezeichnen diese Zahl mit a' und erhalten $a = ba' + a_0$.

- Fazit: Wir können den Wert von a mit nur einer Multiplikation und Addition aus a' berechnen. Potenzen von b sind nicht notwendig.

Beispiel 7: $(2654)_7 = 7 \cdot (265)_7 + 4$

Aus unseren Überlegungen ergibt sich ein Algorithmus zur Auswertung einer Ziffernfolge $(a_{k-1}a_{k-2}\dots a_0)_b$, welcher als *Horner-Schema* bekannt ist.

Algorithmus HORNER. **Eingabe:** $k, b \in \mathbb{Z}$ sowie Ziffernfolge $(a_{k-1}a_{k-2}\dots a_0)_b$.

1. Setze $a = 0$ und $i = k - 1$.
2. Falls $i < 0$, gib a als Ergebnis zurück.
3. Ersetze a durch $b \cdot a + a_i$ sowie i durch $i - 1$ und gehe zu Zeile 2.

Beispiel 8: Für $(2654)_7$ erhalten wir folgenden Ablauf:

1. Nach Zeile 1 gilt $a = 0$ und $i = 3$.
2. Der Algorithmus setzt $a = 7 \cdot 0 + 2 = 2$ und $i = 2$.
3. Der Algorithmus setzt $a = 7 \cdot 2 + 6 = 20$ und $i = 1$.
4. Der Algorithmus setzt $a = 7 \cdot 20 + 5 = 145$ und $i = 0$.
5. Der Algorithmus setzt $a = 7 \cdot 145 + 4 = 1019$ und $i = -1$.
6. Der Algorithmus gibt nun $a = 1019$ als Ergebnis zurück. (Das ist korrekt.)

Aufgabe 3: Wandeln Sie mit Hilfe des Algorithmus HORNER ins Dezimalsystem um:

(a) $(1011)_2$

(b) $(1234)_5$

(c) $(1A2B)_{12}$

Aufgabe 4: Entwickeln Sie einen rekursiven Algorithmus zur Auswertung einer Ziffernfolge $(a_{k-1}a_{k-2}\dots a_0)_b$. Verwenden Sie den oben gezeigten Zusammenhang $a = ba' + a_0$. Werten Sie mit Ihrem Algorithmus $(2654)_7$ aus.

4 Umrechnung aus dem Dezimalsystem in andere Zahlensysteme

Wollen wir eine positive ganze Zahl a in ihre b-adische Darstellung

$$(a_{k-1}a_{k-2}\dots a_1 a_0)_b$$

überführen, benötigen wir einen weiteren Algorithmus. Dieser bestimmt nacheinander, beginnend mit der niedrigstwertigen Ziffer a_0, die gesuchten Ziffern a_0 bis a_{k-1}.

Wir beginnen zunächst mit ein paar Vorüberlegungen, die für das Verständnis des Algorithmus hilfreich sind. (Ungeduldige können diese Vorüberlegungen überspringen.)

Vorüberlegung (Teil 1):

- Wir erinnern uns: Für alle ganzen Zahlen a und $b \neq 0$ gilt:

$$a = a \bmod b + b \cdot \lfloor a/b \rfloor \tag{2}$$

Vorüberlegung (Teil 2):

- Durch Gleichsetzen der Gleichungen (1) und (2) ergibt sich

$$a \bmod b + b \cdot \lfloor a/b \rfloor = a_0 + b \cdot a'.$$

- Die linke und rechte Seite der Gleichung haben eine sehr ähnliche Form.
- Wir identifizieren leicht $a_0 = a \bmod b$ und $a' = \lfloor a/b \rfloor$.
- Dies liefert uns die Grundlagen des Algorithmus:
  - Die niedrigstwertige Ziffer a_0 der b-adischen Darstellung von a ist $a_0 = a \bmod b$.
  - Die weiteren gesuchten Ziffern a_1 bis a_{k-1} entsprechen der b-adischen Darstellung von $\lfloor a/b \rfloor$. Diese können wir nachfolgend auf die gleiche Weise bestimmen.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich folgender Algorithmus:

Algorithmus CONVERT. **Eingabe:** Natürliche Zahlen $a, b > 0$.

1. Setze $k = 0$.
2. Falls $a = 0$, gib $(a_{k-1}a_{k-2}\dots a_0)_b$ als Ergebnis zurück.
3. Setze $a_k = \mathrm{MOD}(a, b)$.
4. Ersetze a durch $\mathrm{DIV}(a, b)$ und k durch $k + 1$.
5. Gehe zu Zeile 2.

Beispiel 9: Wir rechnen $a = 1019$ ins 7-adische Zahlensystem um und erhalten:

- $a_0 = 1019 \bmod 7 = 4$, da $1019/7 = 145$ Rest 4.
- $a_1 = 145 \bmod 7 = 5$, da $145/7 = 20$ Rest 5.
- $a_2 = 20 \bmod 7 = 6$, da $20/7 = 2$ Rest 6.
- $a_3 = 2 \bmod 7 = 2$, da $2/7 = 0$ Rest 2.

Zusammenfassend erhalten wir $(2654)_7$. Dass dies stimmt, haben wir oben bereits gesehen.

Aufgabe 5: Wandeln Sie vom Dezimalsystem ins angegebene Zahlensystem um:

(a) 1043 ins 4-adische Zahlensystem

(b) 68 ins 2-adische Zahlensystem (= Binärsystem)

(c) 7854 ins 16-adische Zahlensystem (= Hexadezimalsystem)

Aufgabe 6: Entwickeln Sie einen Algorithmus, welcher für eine gegebene ganze Zahl a die Häufigkeit der Ziffer 0 in ihrer b-adischen Darstellung bestimmt. (Eingabe: $a, b \in \mathbb{N}$).