



Teil 5: Aussagenlogik

Bevor wir uns in den nächsten Tagen mit Beweistechniken beschäftigen, legen wir zunächst die Grundlagen der *Aussagenlogik*, ohne die Beweise nicht verstanden werden können.

1 Aussagen

Definition 1 (Aussage). *Eine Aussage ist ein aus Wörtern oder mathematischen Zeichen aufgebauter Ausdruck, von dem es möglich und sinnvoll ist zu fragen, ob er wahr (W) oder falsch (F) ist.*

Ein Ausdruck ist also eine Aussage, wenn wir sinnvoll fragen können: Ist es wahr, dass ... ?

Beispiel 1: Folgende Ausdrücke sind Aussagen:

- 6 ist eine gerade Zahl. (Wahre Aussage)
- Alle ganzen Zahlen sind durch 3 teilbar. (Falsche Aussage)
- München liegt in Sachsen-Anhalt. (Falsche Aussage)
- Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen liegt mindestens eine Primzahl. (Wahrheitswert unbekannt, Legendresche Vermutung)

Keine Aussagen im mathematischen Sinne sind zum Beispiel die Ausdrücke:

Beispiel 2:

- Ist 5 eine Primzahl?
- Guten Appetit!
- Für alle $x > 0$ gilt es.
- $5 + 4$
- $x > 2$

Anmerkungen:

- Es ist nicht erforderlich, sagen zu können, ob der Ausdruck wahr oder falsch ist. Es genügt, dass die Frage nach Wahrheit oder Falschheit sinnvoll ist.
- Ausdrücke mit freien Variablen wie $x > 2$ sind *keine* Aussagen (weil es vom Wert von x abhängt ob der Ausdruck wahr oder falsch ist) sondern Aussageformen (dazu kommen wir später).
- Der Wahrheitswert einer Aussage ist entweder wahr oder falsch, niemals beides.
- Es gibt außer wahr und falsch keinen dritten Wahrheitswert.

Aufgabe 1: Handelt es sich bei den folgenden Sätzen um Aussagen?

- (a) $3/2 \in \mathbb{Z}$
- (b) $\sqrt{2}$
- (c) $a^2 + b^2 = c^2$
- (d) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt $a^2 + b^2 = c^2$.
- (e) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $n^2 = n$.

Aufgabe 2: Formulieren Sie zwei wahre Aussagen über Zahlen.

Aufgabe 3: Formulieren Sie zwei falsche Aussagen über Zahlen.

2 Negation (Verneinung)

Aussagen können negiert (= verneint) werden. Die *Negation* einer Aussage A wird mit \bar{A} bezeichnet und hat den entgegengesetzten Wahrheitswert von A .

Definition: Die Negation \bar{A} einer Aussage A ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Die folgende *Wahrheitstabelle* veranschaulicht die Definition in kompakter Form.

A	\bar{A}
W	F
F	W

Beispiel 3:

- A : 6 ist eine gerade Zahl. (W)
- $\Rightarrow \bar{A}$: 6 ist keine gerade Zahl. (F)

Beispiel 4:

- A : Alle geraden Zahlen sind durch 3 teilbar. (F)
- $\Rightarrow \bar{A}$: Es gibt (mindestens) eine gerade Zahl, die nicht durch 3 teilbar ist. (W)

Aufgabe 4: Negieren Sie folgende Aussagen und bestimmen Sie deren Wahrheitswert:

- (a) 5 ist eine gerade Zahl.
- (b) $4 = 3 + 4$
- (c) Es gibt keine blauen Autos.
- (d) Alle Autos sind rot.

Aufgabe 5: Erweitern Sie die Wahrheitstabelle um die Spalte $\overline{\overline{A}}$.

Anmerkungen:

- Negation \neq Gegenteil. In der natürlichen Sprache bezeichnet *Gegenteil* das andere Ende eines Spektrums. Zum Beispiel sind „Alle Autos sind rot“ und „Kein Auto ist rot“ Gegenteile, jedoch nicht Negationen von einander.

3 Konjunktion (Und-Verknüpfung)

Zwei Aussagen A und B können durch „und“ zu einer zusammengesetzten Aussage $A \wedge B$ verknüpft werden. Die zusammengesetzte Aussage ist nur dann wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind.

Definition 2 (Konjunktion). Die Konjunktion $A \wedge B$ zweier Aussagen A und B ist genau dann wahr, wenn sowohl A und B wahr sind.

A	B	$A \wedge B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Beispiel 5:

- $\underbrace{\text{München liegt in Bayern}}_{A(W)} \text{ und } \underbrace{[\text{München liegt}] \text{ nicht in Sachsen-Anhalt}}_{B(W)}. \quad (W)$
- $\underbrace{5 \text{ ist eine ganze Zahl}}_{A(W)} \text{ und } \underbrace{[5] \text{ ist gerade}}_{B(F)}. \quad (F)$
- $\underbrace{4 + 4 = 9}_{A(F)} \wedge \underbrace{4 \in \mathbb{Z}}_{B(W)} \quad (F).$

Aufgabe 6: Fügen Sie der Wahrheitstabelle folgende Spalten hinzu.

- $A \wedge \overline{B}$,
- $A \wedge \overline{A}$,
- $B \wedge A$,
- $\overline{A} \wedge \overline{B}$.

Aufgabe 7: Geben Sie jeder der folgenden Aussagen einen sprachlichen Inhalt.

- $A \wedge \overline{B}$
- $\overline{A} \wedge \overline{B}$
- $A \wedge \overline{A}$

4 Disjunktion (Oder-Verknüpfung)

Zwei Aussagen A und B können durch „oder“ zu einer zusammengesetzten Aussage $A \vee B$ verknüpft werden. Die zusammengesetzte Aussage ist wahr, sofern mindestens eine der Aussagen A und B wahr ist.

Definition 3 (Disjunktion). Die Disjunktion $A \vee B$ zweier Aussagen A und B ist genau dann falsch, wenn A und B falsch sind.

A	B	$A \vee B$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Beispiel 6:

- $\underbrace{\text{München liegt in Bayern}}_W \text{ oder } \underbrace{[\text{München liegt}] \text{ in Sachsen}}_F$. (W)
- $\underbrace{4 \text{ ist ungerade}}_F \text{ oder } \underbrace{[4] \text{ ist nicht ganzzahlig}}_F$. (F)

Aufgabe 8: Fügen Sie der Wahrheitstabelle folgende Spalten hinzu.

- $\overline{A \vee B}$,
- $\overline{A} \wedge \overline{B}$,
- $\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$,
- $\overline{A} \wedge (A \vee B)$.

5 Äquivalenzen (Gleichwertigkeit)

Wir haben bereits Beispiele für logische Aussagen mit gleichen Wahrheitswerten gesehen. Solche Aussagen werden als *äquivalent* (= gleichwertig) bezeichnet. Dass zwei Aussagen A und B äquivalent sind, ist selbst wiederum eine Aussage (die also wahr oder falsch ist).

Definition 4 (Äquivalenz). Die Äquivalenz $A \leftrightarrow B$ zweier Aussagen A und B ist genau dann wahr, wenn A und B denselben Wahrheitswert haben.

A	B	$A \leftrightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Beispiel 7: Wir hatten weiter oben bereits folgende Äquivalenzen nachgewiesen:

- $A \leftrightarrow \overline{\overline{A}}$
- $(A \vee B) \leftrightarrow (\overline{\overline{A \wedge B}})$

Diese Äquivalenzen sind unabhängig vom Wahrheitswert der Teilaussagen A und B allein aufgrund ihrer Struktur stets wahr. Das können wir uns anhand einer Wahrheitstabelle noch einmal anschauen:

A	B	$\overline{\overline{A}}$	$A \vee B$	$\overline{\overline{A \wedge B}}$	$A \leftrightarrow \overline{\overline{A}}$	$(A \vee B) \leftrightarrow (\overline{\overline{A \wedge B}})$
W	W	W	W	W	W	W
W	F	W	W	W	W	W
F	W	F	W	W	W	W
F	F	F	F	F	W	W

Wir sehen, dass die Spalten $A \leftrightarrow \overline{\overline{A}}$ und $(A \vee B) \leftrightarrow (\overline{\overline{A \wedge B}})$ ausschließlich den Wahrheitswert Wahr enthalten. Die Äquivalenzaussagen $A \leftrightarrow \overline{\overline{A}}$ und $(A \vee B) \leftrightarrow (\overline{\overline{A \wedge B}})$ sind somit wahr.

Anmerkungen:

- Äquivalente Aussagen besitzen identische Spalten in einer Wahrheitstabelle.
- Unterscheiden sich jedoch die Spalten einer Wahrheitstabelle, so sind die dazugehörigen Ausdrücke *nicht* äquivalent. Die Äquivalenz-Aussage ist dann falsch.
- Äquivalente Aussagen können durcheinander ersetzt werden, ohne den Sinn der Aussage zu ändern.
 - Dies bildet die Grundlage zur Vereinfachung von Aussagen.

Aufgabe 9: Bestimmen Sie die Wahrheitswerte folgender Äquivalenz-Aussagen:

- $A \leftrightarrow (A \vee (A \wedge \overline{A}))$
- $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow B$
- $(\overline{A} \vee \overline{B}) \leftrightarrow \overline{A \wedge B}$
- $B \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee B)$

6 Implikationen (Folgerungen)

Zwei Aussagen A und B können zu einer *Implikation* (= Wenn-Dann-Aussage) $A \rightarrow B$ zusammengesetzt werden. Die Implikation stellt ein logisches Abhängigkeitsverhältnis zwischen den Aussagen A und B her. Dabei muss A erfüllt sein, damit B gilt.

Vor einer formalen Definition schauen wir uns zunächst ein motivierendes Beispiel an:

Beispiel 8: Wir betrachten folgende Implikation der Form $A \rightarrow B$:

Wenn $\underbrace{\text{es regnet}}_A$, dann $\underbrace{\text{ist die Straße nass}}_B$.

Ist diese Wenn-Dann-Aussage wahr oder falsch? Das hängt von den Wahrheitswerten der Teilaussagen A und B ab. Wir diskutieren alle möglichen Fälle separat:

- Regnet es tatsächlich (A ist wahr) und ist die Straße tatsächlich nass (B ist wahr), so gibt die Wenn-Dann-Aussage in diesem Fall offenbar die Wahrheit wieder.
Fazit: Sind A und B wahr, so ist $A \rightarrow B$ ebenfalls wahr.
- Regnet es tatsächlich (A ist wahr), aber die Straße ist *nicht* nass (B ist falsch), so ist die Wenn-Dann-Aussage offenbar falsch.
Fazit: Ist A wahr und B falsch, so ist $A \rightarrow B$ falsch.
- Was aber ist, wenn es gar nicht regnet (A ist falsch)? Die Implikation trifft darüber keine Aussage. Die Straße kann aus einem anderen Grund nass sein (beispielsweise durch einen offenen Hydranten), oder sie ist trocken. Wir können in diesem Fall *nicht* sagen, dass die Implikation $A \rightarrow B$ falsch wäre. Also muss sie wahr sein.
Fazit: Ist also A falsch, so ist $A \rightarrow B$ wahr (unabhängig von B).

Definition 5 (Implikation). Die Implikation $A \rightarrow B$ zweier Aussagen A und B ist genau dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist.

Wir erhalten folgende Wahrheitstabelle:

A	B	$A \rightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Beispiel 9: Wenn $\underbrace{4 \text{ eine ganze Zahl ist}}_{A (W)}$, dann $\underbrace{\text{ist } 5 \text{ eine ganze Zahl}}_{B (W)}$. (W)

- Die Implikation ist wahr, da Prämisse und Konklusion wahr sind.

Beispiel 10: Wenn $\underbrace{4 \text{ eine ganze Zahl ist}}_{A (W)}$, dann $\underbrace{\text{ist die Erde flach}}_{B (F)}$. (F)

- Die Implikation ist falsch, da die Prämisse wahr und die Konklusion falsch ist.

Beispiel 11: Wenn $\underbrace{\text{die Erde flach ist}}_{A (F)}$, dann $\underbrace{\text{leben Reptilien auf dem Mars}}_{B (F)}$. (W)

- Die Implikation ist wahr, da die Prämisse falsch ist.

Anmerkungen:

- Aus einer falschen Prämisse folgt Beliebiges (= W oder F).

Aufgabe 10: Fügen Sie der Wahrheitstabelle folgende Spalten hinzu.

- (a) $B \rightarrow A$,
- (b) $A \rightarrow \bar{B}$,
- (c) $\overline{A \rightarrow B}$.

Aufgabe 11: Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (a) $(A \rightarrow B)$ und $(\bar{B} \rightarrow \bar{A})$
- (b) $(A \leftrightarrow B)$ und $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$
- (c) $\overline{(A \rightarrow B)}$ und $(A \wedge \bar{B})$
- (d) $(A \rightarrow B)$ und $(\bar{A} \vee B)$

Aufgabe 12: Formulieren Sie jeweils eine äquivalente Aussage ausschließlich unter Verwendung von Negationen, Konjunktionen und Disjunktionen. Vereinfachen Sie die Ausdrücke anschließend so weit wie möglich.

- (a) $A \rightarrow B$
- (b) $A \leftrightarrow (A \vee B)$
- (c) $\overline{\bar{A} \rightarrow B} \leftrightarrow A$

7 Tautologien

Besondere Bedeutung haben Aussagen, die *unabhängig* der Wahrheitswerte ihrer Teilaussagen (allein aufgrund ihrer Struktur) immer wahr sind. Eine solche Aussage wird als *Tautologie* bezeichnet.

Anmerkungen:

- Die zu einer Tautologie gehörende Spalte einer Wahrheitstabelle enthält nur W.
- Allgemeingültige mathematische Sätze sind Tautologien (siehe Abschnitt Beweise).

Aufgabe 13: Weisen Sie nach, dass folgende Aussagen Tautologien sind. Interpretieren Sie!

- (a) $A \vee \bar{A}$
- (b) $A \rightarrow A$
- * (c) $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$
- * (d) $((A \rightarrow B) \wedge \bar{B}) \rightarrow \bar{A}$

8 Aussageformen

Häufig sind mathematische Ausdrücke abhängig von einer freien Variablen, z. B.: n ist gerade. Der Ausdruck enthält also gewissermaßen eine Lücke, die gefüllt wird, indem für n ein konkreter Wert eingesetzt wird. Solche Ausdrücke nennen wir *Aussageformen*.

Definition 6 (Aussageform). *Eine Aussageform ist ein aus Wörtern oder mathematischen Zeichen aufgebauter Ausdruck mit mindestens einer Variablen, der durch Einsetzen eines konkreten Wertes zu einer Aussage wird.*

Beispiel 12:

- $A(x): x > 2$
- $A(y): y$ ist ein Mensch.
- $A(n)$: Ist n eine gerade Zahl, so ist n^2 ebenfalls gerade.

Die Frage „Ist es wahr, dass $x > 2$?“ kann ohne Kenntnis von x nicht sinnvoll beantwortet werden. Erst durch Einsetzen eines konkreten Wertes (z.B. $x = 4$) entsteht eine sinnvolle Frage: Ist es wahr, dass $4 > 2$?

Eine Aussageform kann auf zwei Weisen zu einer Aussage werden:

- Durch Einsetzen eines konkreten Wertes für die Variable (z. B. $x = 3$).
- Durch den Einsatz von *Quantoren* (dazu gleich mehr).

8.1 Quantoren

Aussageformen können mit Hilfe von Quantoren zu Aussagen gemacht werden. Wir betrachten zwei Arten von Quantoren: Den All-Quantor \forall und den Existenz-Quantor \exists .

8.1.1 All-Quantor und All-Aussagen

Soll eine Aussageform $A(x)$ für alle Werte eines gewissen Wertebereiches gelten, machen wir dies mit dem *All-Quantor* \forall kenntlich.

Definition 7 (All-Aussage). *Die All-Aussage $\forall x \in \Omega: A(x)$ ist genau dann wahr, wenn $A(x)$ für alle Werte x aus dem gegebenen Wertebereich Ω wahr ist.*

Beispiel 13:

- $\forall x \in \mathbb{R}: x > 2$ (Falsche Aussage, da $1 \not> 2$ und $1 \in \mathbb{R}$.)
- $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$ (Wahre Aussage)

8.1.2 Existenz-Quantor und Existenz-Aussagen

Reicht es aus, dass eine Aussageform $A(x)$ für mindestens einen Wert x aus dem Wertebereich Ω gilt, verwenden wir den *Existenz-Quantor* \exists .

Definition 8 (Existenz-Aussage). Die Existenz-Aussage $\exists x \in \Omega: A(x)$ ist genau dann wahr, wenn $A(x)$ für mindestens einen Wert x aus dem gegebenen Wertebereich Ω wahr ist.

Beispiel 14:

- $\exists x \in \mathbb{R}: 2x = 4$ (Wahre Aussage, z.B. mit $x = 2$.)
- $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 = 4$ (Wahre Aussage, z.B. mit $x = 2$ und $x = -2$.)
- $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 > 4$ (Wahre Aussage, z.B. mit $x = 4$)
- $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 < 0$ (Falsche Aussage)

Aufgabe 14: Geben Sie folgenden Aussagen einen sprachlichen Inhalt.

- (a) $\forall x \in \mathbb{R}: \exists y \in \mathbb{R}: y < x$.
- (b) $\exists y \in \mathbb{R}: \forall x \in \mathbb{R}: y < x$.
- (c) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \exists \varepsilon \in \mathbb{R}: x + \varepsilon = y$.

Aufgabe 15: Formulieren Sie folgende Sachverhalte als aussagenlogische Ausdrücke:

- (a) Das Quadrat aller ganzen Zahlen ist nicht-negativ.
- (b) Es gibt eine ganze Zahl, deren Wurzel nicht ganzzahlig ist.
- (c) Jede reelle Zahl kann als Produkt zweier reeller Zahlen dargestellt werden.
- (d) Es gibt keine reelle Zahl, die nicht Summe zweier reeller Zahlen ist.
- (e) Für alle reellen Zahlen x und y gilt: Wenn x und y negativ sind, dann ist $x \cdot y$ positiv.

8.2 Negation von All- und Existenzaussagen

Besonderes Augenmerk gilt der Negation von All- und Existenzaussagen.

Vorüberlegung (Teil 1)

- Offenbar ist eine All-Aussage der Form $\forall x \in \Omega: A(x)$ bereits falsch, wenn es mindestens ein Element $x \in \Omega$ gibt, welche die Eigenschaft $A(x)$ nicht erfüllt.

→ Die Negation der All-Aussage $\forall x \in \Omega: A(x)$ ist die Existenz-Aussage $\exists x \in \Omega: \overline{A(x)}$.

Vorüberlegung (Teil 2)

- Umgekehrt ist eine Existenz-Aussage $\exists x \in \Omega: A(x)$ offenbar falsch, wenn alle $x \in \Omega$ die Eigenschaft $A(x)$ verletzen.

→ Die Negation der Existenz-Aussage $\exists x \in \Omega: A(x)$ ist die All-Aussage $\forall x \in \Omega: \overline{A(x)}$.

Wir halten folgende Äquivalenzen fest:

$$\overline{\forall x \in \Omega: A(x)} \leftrightarrow \exists x \in \Omega: \overline{A(x)} \quad \text{und} \quad \overline{\exists x \in \Omega: A(x)} \leftrightarrow \forall x \in \Omega: \overline{A(x)}.$$

Bemerkung: Statt der Verneinung $\overline{\exists x \in \Omega: A(x)}$ schreibt man häufig $\nexists x \in \Omega: A(x)$.

Aufgabe 16: Formulieren Sie die Negation folgender Sachverhalte als logische Aussage:

- (a) Das Quadrat aller ganzen Zahlen ist nicht-negativ.
- (b) Es gibt eine ganze Zahl, deren Wurzel nicht ganzzahlig ist.
- (c) Jede reelle Zahl kann als Produkt zweier reeller Zahlen dargestellt werden.
- (d) Es gibt keine reelle Zahl, die nicht Summe zweier reeller Zahlen ist.
- (e) Für alle reellen Zahlen x und y gilt: Wenn x und y negativ sind, dann ist $x \cdot y$ positiv.

Geben Sie den negierten Aussagen anschließend einen sprachlichen Inhalt.