Teil 8: Direkter Beweis

Die am weitesten verbreiteteste Beweistechnik ist der *direkte Beweis*.

Vorüberlegung:

- Wir erinnern uns an folgende Tautologie (*Modus Ponens*): $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$
  - Ist A wahr und ist $A \rightarrow B$ wahr, dann ist B wahr.
- Die Implikation $A \rightarrow B$ „überträgt" also die Wahrheit von A auf B.
- Dieses Prinzip können wir erweitern zu einer *Argumentationskette*

$$A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \ldots \rightarrow B.$$

- Ist die erste Aussage A_0 einer Argumentationskette wahr, dann
  - wird deren Wahrheit nach rechts auf alle weiteren Aussagen übertragen.
  - Insbesondere ist gezeigt, dass die Aussage B wahr ist.

1 Beweis einfacher Aussagen

Wir betrachten zunächst Beweise einfacher (= nicht zusammengesetzter) Aussagen.

Ziel: Wir wollen formal nachweisen, dass eine Aussage A wahr ist.

Beweisstruktur:

- Ausgangspunkt: Axiom (= beweislos als wahr akzeptierte Aussage) A_0
- Vorgehen: Ableiten einer Argumentationskette $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow ... \rightarrow A$.
- Alle Zwischenschritte $A_i \rightarrow A_{i+1}$ müssen begründet sein, z. B. durch Anwendung von
  - Definitionen und Axiomen
  - bereits bewiesenen Sätzen
  - äquivalenten Umformungen
  - nachvollziehbaren Schlussfolgerungen.

Beispiel 1: Wir beweisen die Aussage: 6 ist gerade.

Beweis.

	Aussage	**Begründung**
	$3 \in \mathbb{N}$	(Axiom)
$\rightarrow$	$2 \cdot 3 \in \mathbb{N}$	(Wenn $n \in \mathbb{N}$, dann $2n \in \mathbb{N}$)
$\rightarrow$	$2 \cdot 3$ ist gerade.	(Definition „gerade“)
$\rightarrow$	6 ist gerade.	$(2 \cdot 3 = 6)$

□

Analysieren wir diesen Beweis:

- Wir beginnen mit einer als wahr angenommenen Aussage: $3 \in \mathbb{N}$. Diese Aussage wird wohl niemand in Frage stellen. (Falls doch könnten wir diese aber ebenfalls beweisen.)
- Wir schließen daraus, dass der Ausdruck $2 \cdot 3$ ebenfalls eine natürliche Zahl sein muss. Warum dürfen wir das? Weil allgemein gilt: Wenn $n \in \mathbb{N}$, dann $2n \in \mathbb{N}$. Wir verwenden hier also einen als wahr angenommenen (oder anderswo bewiesenen) Satz als Argument.
- Wir dürfen nun die Definition „gerade“ auf den Ausdruck $2 \cdot 3$ anwenden. Dazu war es wichtig, dass wir zuvor gezeigt haben, dass sowohl 3 als auch $2 \cdot 3$ natürliche Zahlen sind. Hätten wir dies nicht gezeigt, könnten wir die Definition nicht anwenden.
- Im letzten Schritt vereinfachen wir den Ausdruck.
- Jeder einzelne Schritt ist begründet. Die Argumentationskette ist lückenlos.

Anmerkungen:

- Streng genommen haben wir nur folgende Implikation bewiesen: $3 \in \mathbb{N} \rightarrow 6 \in \mathbb{N}$.
- Wir können keine Aussagen „aus dem luftleeren Raum heraus” beweisen. Wir benötigen stets einen Ausgangspunkt, auf dem wir den Beweis aufbauen. Das sind Axiome.
- Ein Großteil der Mathematik ist axiomatisch aufgebaut.

Aufgabe 1: Beweisen Sie mittels direktem Beweis:

(a) 12 ist gerade.

(b) $3 \mid 12$

(c) $1 < 4$

(d) 6 ist nicht prim.

2 Beweis von All-Aussagen

Ein Spezialfall liegt vor, wenn die zu beweisende Aussage eine All-Aussage ist.

Ziel: Beweis einer Aussage $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n)$.

Beweisstruktur:

- Wir betrachten eine *beliebige* (= irgendeine, uns unbekannte) natürliche Zahl n.
  - Diese dient im Folgenden stellvertretend für *alle* natürlichen Zahlen.
  - Alle Aussagen über n gelten somit für allgemein für alle natürlichen Zahlen.
- Ausgangspunkt (*Prämisse*): $n \in \mathbb{N}$.
- Vorgehen: Ableiten einer Argumentationskette

$$n \in \mathbb{N} \to A_1(n) \to A_2(n) \to \ldots \to A(n).$$

- Alle Zwischenschritte müssen begründet sein, z. B. durch Anwendung von
  - Definitionen und Axiomen
  - bereits bewiesenen Sätzen
  - äquivalenten Umformungen
  - nachvollziehbaren Schlussfolgerungen.

Beispiel 2: Wir beweisen die Aussage: $\forall n \in \mathbb{N}\colon 4n + 6$ ist gerade.

Beweis. Sei n eine beliebige natürliche Zahl.

	Aussage	**Begründung**
	$n \in \mathbb{N}$	(Prämisse)
$\to$	$2n + 3 \in \mathbb{N}$	(Wenn $m, n, k \in \mathbb{N}$, dann $m \cdot n + k \in \mathbb{N}$)
$\to$	$2 \cdot (2n + 3) \in \mathbb{N}$	(Wenn $m, n \in \mathbb{N}$, dann $m \cdot n \in \mathbb{N}$)
$\to$	$2 \cdot (2n + 3)$ ist gerade	(Definition „gerade“)
$\to$	$4n + 6$ ist gerade	($2 \cdot (2n + 3) = 4n + 6$)

$\square$

Interessant ist der vorletzte Schritt. Wir durften die Definition „gerade“ anwenden, weil wir zuvor gezeigt haben, dass

- $2 \cdot (2n + 3)$ eine natürliche Zahl ist, und dass
- $2n + 3$ eine natürliche Zahl ist.

Aufgabe 2: Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels direkter Beweise:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}\colon 1 \mid n$

(b) Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt: $a \mid (ab)$.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $6n + 5$ ist ungerade.

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n^2 + 2n + 1$ ist nicht prim.

3 Beweis von Implikationen

Der häufigste Anwendungsfall direkter Beweise sind Aussagen $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n) \to B(n)$.

Ziel: Nachweis der All-Aussage $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n) \to B(n)$.

Beweisstruktur

- Wir betrachten eine beliebige natürliche Zahl n.
- Ausgangspunkt (*Prämisse*): $A(n)$.
- Vorgehen: Ableiten einer Argumentationskette

$$A(n) \to A_1(n) \to A_2(n) \to \ldots \to B(n).$$

- Alle Zwischenschritte müssen begründet sein, z. B. durch
  - Anwendung von Definitionen
  - Anwendung bereits bewiesener Sätze
  - Äquivalente Umformungen
  - Nachvollziehbare Schlussfolgerungen

Beispiel 3: Wir beweisen folgenden Satz.

Satz 1. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn n durch 4 teilbar ist, dann ist n auch durch 2 teilbar.*

Der Satz hat die Struktur $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n) \to B(n)$.

- $A(n)$: $4 \mid n$
- $B(n)$: $2 \mid n$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl.

	Aussage	**Begründung**
	$4 \mid n$	(Prämisse)
$\to$	$\exists m \in \mathbb{N}\colon n = 4m$	(Definition „teilbar“)
$\to$	$\exists m \in \mathbb{N}\colon n = 2 \cdot 2m$	$(4 = 2 \cdot 2)$
$\to$	$\exists k \in \mathbb{N}\colon n = 2k$	(Wenn $m \in \mathbb{N}$, dann $k = 2m \in \mathbb{N}$)
$\to$	$2 \mid n$	(Defintion „teilbar“)

$\square$

Beispiel 4: Wir beweisen folgenden Satz:

Satz 2. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn n gerade ist, dann ist n^2 ebenfalls gerade.*

Der Satz hat die Struktur $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n) \to A(n^2)$.

- $A(x)$: x ist gerade.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl.

	Aussage	**Begründung**
	n ist gerade	(Prämisse)
$\to$	$\exists m \in \mathbb{N}\colon n = 2m$	(Definition „gerade“)
$\to$	$\exists m \in \mathbb{N}\colon n^2 = (2m)^2$	(Beidseitiges Quadrieren erhält Gleichheit)
$\to$	$\exists m \in \mathbb{N}\colon n^2 = 2 \cdot 2m^2$	(Potenzgesetze)
$\to$	$\exists k \in \mathbb{N}\colon n^2 = 2 \cdot k$	(Wenn $m \in \mathbb{N}$, dann $k = 2m^2 \in \mathbb{N}$)
$\to$	n^2 ist gerade.	(Definition „gerade“)

$\square$

Aufgabe 3: Beweisen Sie folgende Aussagen mittels direkter Beweise:

(a) Für alle natürlichen m, n gilt: Wenn $n < m$, dann $n^2 < m^2$.

(b) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn m gerade ist, dann ist $m \cdot n$ gerade.

(c) Die Summe zweier gerader natürlicher Zahlen ist gerade.

(d) Für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $x < y$, dann $x + z < y + z$.

(e) Für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$ gilt: Aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$.

(f) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}\colon (a \mid b) \land (b \mid c) \to (a \mid c)$

(g) $\forall a, b, c, x, y \in \mathbb{N}\colon (a \mid b) \land (a \mid c) \to (a \mid (xb + yc))$