Vorkurs Informatik
Wintersemester 2024/2025

MARTIN-LUTHER-UNIVERSITÄT
HALLE-WITTENBERG

Teil 12: Beweise: Zusammenfassung

Wir haben nun die in der Informatik üblichen Beweistechniken kennengelernt:

- Direkter Beweis
- Widerspruchsbeweis
- Vollständige Induktion
- Beweis per Kontraposition

Häufig bedarf es einer Kombination verschiedener Beweistechniken. Als abschließendes Beispiel beweisen wir folgenden Satz, den wir zuvor bereits verwendet und in Teilen bewiesen haben.

Theorem 1. *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt:* n *ist genau dann nicht gerade, wenn* n *ungerade ist.*

Die Struktur dieser Genau-Dann-Wenn-Aussage ist: $\forall n \in \mathbb{N}\colon \overline{n \text{ gerade}} \leftrightarrow n \text{ ungerade}$. Wir zerlegen den Beweis daher in zwei Teile:

- Hin-Richtung: $\forall n \in \mathbb{N}\colon \overline{n \text{ gerade}} \rightarrow n \text{ ungerade}$.

  Widerspruchsbeweis. Sei n eine beliebige natürliche Zahl.

	Aussage	**Begründung**
	$\overline{n \text{ gerade}} \land \overline{n \text{ ungerade}}$	(Widerspruchsannahme)
$\rightarrow$	$\overline{\exists m \in \mathbb{N}\colon n = 2m} \land \overline{\exists m \in \mathbb{N}\colon n = 2m - 1}$	(Definition „(un)gerade“)
$\rightarrow$	$\overline{\exists m \in \mathbb{N}\colon n = 2m \lor \exists m \in \mathbb{N}\colon n = 2m - 1}$	(De Morgansches Gesetz)
$\rightarrow$	$\overline{\exists m \in \mathbb{N}\colon n = 2m \lor n = 2m - 1}$	(Vereinfachen)
$\rightarrow$	F	(Theorem 2)

  An dieser Stelle erhalten wir einen Widerspruch zu einer Aussage, die wir bereits zuvor mit vollständiger Induktion bewiesen haben:

  Theorem 2. *Es gilt:* $\forall n \in \mathbb{N}\colon \exists m \in \mathbb{N}\colon n = 2m \lor n = 2m - 1$. □

- Rück-Richtung: $\forall n \in \mathbb{N}\colon n \text{ ungerade} \rightarrow \overline{n \text{ gerade}}$

  Widerspruchsbeweis. Sei n eine beliebige natürliche Zahl.

	Aussage	**Begründung**
	$n \text{ gerade} \land n \text{ ungerade}$	(Widerspruchsannahme)
$\rightarrow$	$\exists m \in \mathbb{N}\colon n = 2m \land \exists k \in \mathbb{N}\colon n = 2k - 1$	(Definition „(un)gerade“)
$\rightarrow$	$\exists m, k \in \mathbb{N}\colon 2m = 2k - 1$	(Vereinfachen)
$\rightarrow$	$\exists m, k \in \mathbb{N}\colon m = k - 1/2$	(Division durch 2 erhält Gleichheit)
$\rightarrow$	F	

Hier erhalten wir einen Widerspruch, da die Differenz zweier natürlicher Zahlen niemals eine gebrochene Zahl ist (das hatten wir anfangs als Axiom festgehalten). $\square$