Teil 1: Summen

1 Einführung und Notation

Summen über endliche (oder unendliche) Zahlenfolgen sind ein elementares Konzept in vielen Bereichen der Informatik. Eine Summe besteht aus einer Folge von *Summanden*.

Beispiel 1: Die folgende Summe hat 5 Summanden (und den Wert 150).

$$10 + 20 + 30 + 40 + 50 = 150$$

- Im Beispiel hat der erste Summand den Wert 10, der zweite den Wert 20 und so weiter.
- Typischerweise lassen sich die Summanden in Abhängigkeit einer *Laufvariable* k beschreiben.
- Der Wert des Summanden zur Laufvariable k wird mit a_k bezeichnet.
- Im Beispiel kann man als Laufvariable $k = 1, \ldots, 5$ verwenden.
- Die Summanden haben dann die Form $a_k = 10k$.

In kompakter Form wird eine Summe über folgende Notation beschrieben:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n.$$

Bedeutung

- Laufvariable k: durchläuft <u>alle</u> ganzen Zahlen vom *Startwert* bis zum *Endwert* einmal.
- Startwert m: kleinster Wert für die Laufvariable k.
- Endwert n: größter Wert für die Laufvariable k.
- Summand a_k: Summanden in Abhängigkeit der Laufvariable k.

Die Summe aus Beispiel 1 in Summennotation:

$$\sum_{k=1}^{5} 10k = 10 + 20 + 30 + 40 + 50 = 150.$$

Hier ist der Startwert $m = 1$, der Endwert $n = 5$. Die Summanden haben die Form $a_k = 10k$.

Aufgabe 1: Wie viele Summanden hat eine Summe mit Startwert m und Endwert n?

Bemerkung: Die Form der Summe ist nicht eindeutig. Wir können die Summe aus Beispiel 1 unter Verwendung anderer Start- und Endwerte beispielsweise auch schreiben als:

$$\sum_{k=2}^{6}(10k-10) = (20-10)+(30-10)+(40-10)+(50-10)+(60-10) = 150.$$

Hier ist $m = 2$ und $n = 6$. Die Summanden haben die Form $a_k = 10k - 10$.

Aufgabe 2: Schreiben Sie folgende Summen in expliziter Form und werten Sie diese aus!

(a) $\sum_{k=1}^{5} k^2$

(b) $\sum_{k=-1}^{3}(2k-1)$

(c) $\sum_{i=0}^{3}(-1)^i$

(d) $\sum_{i=12}^{15} |i-14|$

Aufgabe 3: Schreiben Sie unter Verwendung von Summenzeichen!

(a) $3+6+9+12+15$

(b) $-3-6-9-12-15$

(c) $2+2+2+2+2$

(d) $5+12+19+26+33+40+47+54+61$

(e) Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen

! (f) $1-2+3-4+5-6+7-8$

2 Rechenregeln

Summen können durch Anwendung von Rechenregeln ohne großen Rechenaufwand ausgewertet werden. Im Folgenden bezeichnen $m, n \in \mathbb{N}$ natürliche Start- und Endwerte sowie $a_k, b_k, c \in \mathbb{R}$ reellwertige Summanden in Abhängigkeit von einer Laufvariable $k \in \mathbb{Z}$.

2.1 Abspalten und Einziehen von Summanden

Wir können eine Summe in zwei (oder mehr) Summen aufspalten. Dazu wählen wir eine beliebige ganze Zahl i als neuen Endwert (und $i+1$ als neuen Startwert). Es gilt:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{i} a_k + \sum_{k=i+1}^{n} a_k.$$

Beispiel 2: Hier ist $m = 1$, $n = 9$, $a_k = k^2$ und $i = 4$.

$$\sum_{k=1}^{9} k^2 = \sum_{k=1}^{4} k^2 + \sum_{k=5}^{9} k^2.$$

Warum gilt die Regel?

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} a_k &= a_m + \ldots + a_i + a_{i+1} + \ldots + a_n && \text{(Ausschreiben)} \\
&= (a_m + \ldots + a_i) + (a_{i+1} + \ldots + a_n) && \text{(Setzen von Klammern)} \\
&= \sum_{k=m}^{i} a_k + \sum_{k=i+1}^{n} a_k. && \text{(Zusammenfassen)}
\end{aligned}$$

Von besonderer Bedeutung ist das Abspalten des ersten (oder letzten) Summanden:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + \sum_{k=m+1}^{n} a_k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n-1} a_k + a_n.$$

Hinweis: Selbstverständlich gilt die Regel in beide Richtungen. Das heißt:

$$\sum_{k=m}^{i} a_k + \sum_{k=i+1}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Aufgabe 4: Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke!

(a) $\left(\sum_{k=1}^{5} k\right) + \left(\sum_{k=6}^{10} k\right)$

(b) $\left(\sum_{k=1}^{5} k^2\right) + \left(\sum_{k=5}^{10} k^2\right)$

(c) $\left(\sum_{k=1}^{10} k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{4} k^2\right)$

2.2 Assoziativgesetz

Für beliebige Summanden der Form $a_k + b_k$ gilt:

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k.$$

Beispiel 3: Hier: $a_k = k$ und $b_k = 2$.

$$\sum_{k=1}^{10}(k+2) = \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 2.$$

Warum gilt Assoziativität?

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k) &= (a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \ldots + (a_n + b_n) && \text{(Ausschreiben der Summe)}\\
&= a_m + b_m + a_{m+1} + b_{m+1} + \ldots + a_n + b_n && \text{(Weglassen von Klammern)}\\
&= a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n + b_m + b_{m+1} + \ldots + b_n && \text{(Umordnen der Summanden)}\\
&= (a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n) + (b_m + b_{m+1} + \ldots + b_n) && \text{(Neue Klammern)}\\
&= \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k.
\end{aligned}$$

Achtung: Im Allgemeinen ist jedoch:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \cdot b_k \neq \left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=m}^{n} b_k\right).$$

Aufgabe 5: Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke!

(a) $\sum_{k=1}^{5} 10k + \sum_{k=1}^{5} 2$

(b) $\left(\sum_{k=1}^{5}(2-k)\right) + \left(\sum_{k=1}^{5} k\right) - \left(\sum_{k=1}^{5} 2\right)$

(c) $\sum_{k=0}^{11}(4k^2+1) - \sum_{k=0}^{11}(3k^2 - 2k)$

Aufgabe 6: Sind folgende Umformungen korrekt?

(a) $\sum_{k=1}^{10} 3k = \sum_{k=2}^{9} 3k + 33$

(b) $\sum_{k=1}^{10} 3k = \left(\sum_{k=1}^{10} 3\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{10} k\right)$

(c) $\sum_{k=1}^{10}(3k+4) = \left(\sum_{k=1}^{10} 3k\right) + \left(\sum_{k=1}^{10} 4\right)$

2.3 Distributivgesetz

Sei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante. *Achtung*: Die Konstante c darf nicht von k abhängen!

$$\sum_{k=m}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Beispiel 4: Hier ist $a_k = k$ und $c = 2$. Da der Faktor 2 nicht von k abhängt, können wir diesen aus der Summe ausklammern.

$$\sum_{k=1}^{10} 2k = 2 \cdot \sum_{k=1}^{10} k.$$

Warum gilt das Gesetz?

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} c \cdot a_k &= c \cdot a_m + c \cdot a_{m+1} + \ldots + c \cdot a_n && \text{(Ausschreiben)} \\
&= c \cdot (a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n) && \text{(Ausklammern von c)} \\
&= c \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k && \text{(Zusammenfassen).}
\end{aligned}$$

2.4 Summen von Konstanten

Ein wichtiger Spezialfall sind Summen von Konstanten:

$$\sum_{k=m}^{n} c = c \cdot \sum_{k=m}^{n} 1 = c \cdot \underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{n-m+1 \text{ Summanden}} = c \cdot (n - m + 1).$$

Beispiel 5:

$$\sum_{k=0}^{n} 2 = 2 \cdot (n + 1) = 2n + 2.$$

Aufgabe 7: Werten Sie folgende Summen aus!

(a) $\frac{1}{c} \cdot \sum_{k=1}^{50} 2c$

(b) $\sum_{i=1}^{50}(4i + 3i^2 - 20) + \sum_{i=1}^{50}(3i - 4i^2 + 10) - \sum_{i=1}^{50}(30 + 7i - i^2)$

(c) $\sum_{l=4}^{10}(l^3 - 3l^2 + 20) - \sum_{l=3}^{10}(-3l^2 + l^3 + 18)$

2.5 Indexverschiebung

Für beliebige $r \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m-r}^{n-r} a_{k+r}.$$

Wir können die Summanden der Form a_k durch a_{k+r} ersetzen, indem wir alle Vorkommen der Laufvariable k durch $(k+r)$ ersetzen.

Beispiel 6: Hier ist $a_k = 10k$, das heißt $a_{k+r} = 10 \cdot (k+r) = 10k + 10r$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=21}^{25} 10k &= \sum_{k=1}^{5} (10k + 200) && \text{(Indexverschiebung: } r = 20\text{)} \\
&= \sum_{k=1}^{5} 10k + \sum_{k=1}^{5} 200 && \text{(Assoziativität)} \\
&= \sum_{k=1}^{5} 10k + 200 \cdot 5 && \text{(Summen von Konstanten)} \\
&= 10 \sum_{k=1}^{5} k + 200 \cdot 5 && \text{(Distributivität)} \\
&= 10 \cdot (1+2+3+4+5) + 200 \cdot 5 && \text{(Explizite Form)} \\
&= 10 \cdot 15 + 200 \cdot 5 && \text{(Vereinfachen)} \\
&= 150 + 1000 && \text{(Vereinfachen)} \\
&= 1150 && \text{(Vereinfachen)}
\end{aligned}$$

Warum gilt die Regel?

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} a_k &= a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n && \text{(Ausschreiben)} \\
&= a_{m+(r-r)} + a_{m+1+(r-r)} + \ldots + a_{n+(r-r)} && (r - r = 0) \\
&= a_{(m-r)+r} + a_{(m-r+1)+r} + \ldots + a_{(n-r)+r} && \text{(Summanden umordnen)} \\
&= \sum_{k=m-r}^{n-r} a_{k+r}. && \text{(Zusammenfassen)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 8: Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke!

(a) $\sum_{k=11}^{15} (k - 10)$

(b) $\sum_{k=9}^{17} (k-6)^2 - \sum_{k=1}^{7} (k+2)^2$

(c) $\sum_{k=1}^{10} (k+2)^4 - \sum_{k=1}^{12} k^4$

(d) $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k} + \sum_{k=12}^{30} \frac{1}{10-k}$

(e) $\sum_{k=7}^{89} k \cdot (k-2)^3 - \sum_{k=5}^{87} (k^4 + 2k^3)$

3 Besonderheiten

Folgende Besonderheiten im Umgang mit Summen sollte man kennen.

3.1 Leere Summe

Für $m > n$ definiert man:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0.$$

Beispiel 7:

$$\sum_{k=10}^{5} 2k = 0.$$

3.2 Teleskop-Summe

Eine Teleskop-Summe hat die Form

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_m - b_{n+1}.$$

Kann man die Summanden a_k also als Differenz $b_k - b_{k+1}$ zweier von k abhängiger Ausdrücke darstellen, so kann man die Summe sehr leicht auswerten.

Beispiel 8: Im folgenden Beispiel ist $a_k = k^2 - (k+1)^2$, d. h. $b_k = k^2$.

$$\sum_{k=3}^{9} (k^2 - (k+1)^2).$$

Es folgt:

$$\sum_{k=3}^{9} (k^2 - (k+1)^2) = 3^2 - (9+1)^2 = 9 - 100 = -91.$$

Aufgabe 9: Leiten Sie die Regel

$$\sum_{k=m}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_m - b_{n+1}$$

zur Auswertung von Teleskop-Summen aus den anderen Rechenregeln her!

3.3 Gaußsche Summenformel

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen taucht in vielen Anwendungen auf. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Beispiel 9:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{5} 10k &= 10 \sum_{k=1}^{5} k && \text{(Distributivität)} \\
&= 10 \cdot \frac{5^2 + 5}{2} && \text{(Gaußsche Summenformel)} \\
&= 10 \cdot 15 && \text{(Vereinfachen)} \\
&= 150.
\end{aligned}$$

Für Fortgeschrittene: Warum gilt die Regel? Intuitiv kann man argumentieren, dass 1 (die erste Zahl) und n (die letzte Zahl) zusammen $n + 1$ ergeben, 2 und $n - 1$ genauso. Es gibt $n/2$ solcher Paare. Eine solche Argumentation funktioniert allerdings nicht immer. Deshalb führen wir nun einen etwas längeren formalen Beweis.

Wir starten mit

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k &= 1 + 2 + \ldots + n \\
&= n + (n-1) + \ldots + 1 && \text{(Umkehren der Summationsreihenfolge)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (n + 1 - k) && \text{(Überführen in Summenform)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n + \sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} k && \text{(Assoziativitätsgesetz)} \\
&= n^2 + n - \sum_{k=1}^{n} k. && \text{(Summen von Konstanten)}
\end{aligned}$$

Zusammenfassend haben wir bisher folgenden Zusammenhang nachgewiesen:

$$\sum_{k=1}^{n} k = n^2 + n - \sum_{k=1}^{n} k.$$

Addieren wir den Term $\sum_{k=1}^{n} k$ auf beiden Seiten der Gleichung, erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k = n^2 + n \underbrace{- \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k}_{=0},$$

was wir vereinfachen können zu

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k = n^2 + n.$$

Teilen wir schließlich beide Seiten der Gleichung durch 2, erhalten wir das Ergebnis:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Aufgabe 10: Werten Sie (durch Anwendung der Rechenregeln) folgende Summen aus!

(a) $\sum_{k=1}^{10} 2k$

(b) $\sum_{k=4}^{10} k$

(c) $\sum_{k=10}^{29} (3k - 2)$

Aufgabe 11: * Partialsummen geometrischer Reihen.
Seien c und $x \neq 1$ beliebige reelle Zahlen. Zeigen Sie durch Anwendung der Rechenregeln für Summen, dass folgender Zusammenhang für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} cx^k = \frac{c - cx^{n+1}}{1 - x}.$$

4 Doppelsummen

Manchmal sind Summanden von zwei (oder mehr) Laufvariablen abhängig.

$$\sum_{i=m}^{n} \sum_{j=l}^{r} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n} \left(\sum_{j=l}^{r} a_{ij} \right)$$

In der inneren Summe wird der Wert der äußeren Laufvariable i als konstant erachtet.

$$\sum_{i=m}^{n} \sum_{j=l}^{r} a_{ij} = \underbrace{(a_{ml} + \ldots + a_{mr})}_{i=m} + \underbrace{(a_{(m+1)l} + \ldots + a_{(m+1)r})}_{i=m+1} + \ldots + \underbrace{(a_{nl} + \ldots + a_{nr})}_{i=n}.$$

Beispiel 10:

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=i+1}^{4} (i + j) = \underbrace{(1+2) + (1+3) + (1+4)}_{i=1} + \underbrace{(2+3) + (2+4)}_{i=2} + \underbrace{(3+4)}_{i=3} = 30$$

Die äußere Summe hat 3 Summanden der Form $a_i = \sum_{j=i+1}^{4}(i+j)$. Jeder Summand ist selbst eine Summe mit Startwert $l = i+1$, Endwert $r = 4$ und Summanden der Form $a_{ij} = i + j$.

Beispiel 11:

$$\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{8}(i-j)$$

Hier ist $m =$ und $n = 7$. Die äußere Summe hat also 7 Summanden der Form $a_i = \sum_{j=1}^{8}(i-j)$. Jeder Summand ist also selbst wieder eine Summe mit Startwert $l = 1$, Endwert $r = 8$ und Summanden der Form $a_{ij} = i - j$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{8}(i-j) &= \sum_{i=1}^{7}\left(\sum_{j=1}^{8}(i-j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{7}\left(\sum_{j=1}^{8} i - \sum_{j=1}^{8} j\right) && \text{(Assoziativitätsgesetz)} \\
&= \sum_{i=1}^{7}\left(8i - \sum_{j=1}^{8} j\right) && \text{(Summen von Konstanten)} \\
&= \sum_{i=1}^{7}\left(8i - \frac{8\cdot 9}{2}\right) && \text{(Gaußsche Summenformel)} \\
&= \sum_{i=1}^{7}(8i-36) && \text{(Vereinfachen)} \\
&= \sum_{i=1}^{7} 8i - \sum_{i=1}^{7} 36 && \text{(Assoziativitätsgesetz)} \\
&= 8\cdot\sum_{i=1}^{7} i - 36\cdot\sum_{i=1}^{7} 1 && \text{(Distributivitätsgesetz)} \\
&= 8\cdot\frac{7\cdot 8}{2} - 36\cdot 7 && \text{(Summen von Konstanten)} \\
&= 8\cdot 7\cdot 4 - 36\cdot 7 && \text{(Vereinfachen)} \\
&= 7\cdot(8\cdot 4 - 36) && \text{(Ausklammern von 7)} \\
&= 7\cdot -4 && \text{(Vereinfachen)} \\
&= -28.
\end{aligned}$$

Aufgabe 12: Vereinfachen Sie folgende Summen!

(a) $\sum_{i=11}^{16}\sum_{j=1}^{5} ij$

(b) $\sum_{i=1}^{131}\sum_{j=2i}^{5}(i-j)^2$