Teil 5: Aussagenlogik

Bevor wir uns in den nächsten Tagen mit Beweistechniken beschäftigen, legen wir zunächst die Grundlagen der *Aussagenlogik*, ohne die Beweise nicht verstanden werden können.

1 Aussagen

Definition 1 (Aussage)**.** *Eine* Aussage *ist ein aus Wörtern oder mathematischen Zeichen aufgebauter Ausdruck, von dem es möglich und sinnvoll ist zu fragen, ob er wahr (W) oder falsch (F) ist.*

Ein Ausdruck ist also eine Aussage, wenn wir sinnvoll fragen können: Ist es wahr, dass ... ?

Beispiel 1: Folgende Ausdrücke sind Aussagen:

- 6 ist eine gerade Zahl. (Wahre Aussage)
- Alle ganzen Zahlen sind durch 3 teilbar. (Falsche Aussage)
- München liegt in Sachsen-Anhalt. (Falsche Aussage)
- Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen liegt mindestens eine Primzahl. (Wahrheitswert unbekannt, Legendresche Vermutung)

Keine Aussagen im mathematischen Sinne sind zum Beispiel die Ausdrücke:

Beispiel 2:

- Ist 5 eine Primzahl?
- Für alle $x > 0$.
- $5 + 4$
- $x > 2$

Anmerkungen:

- Es ist nicht erforderlich, sagen zu können, ob der Ausdruck wahr oder falsch ist. Es genügt, dass die Frage nach Wahrheit oder Falschheit sinnvoll ist.
- Ausdrücke mit freien Variablen wie $x > 2$ sind *keine* Aussagen (weil es vom Wert von x abhängt, ob der Ausdruck wahr oder falsch ist) sondern Aussageformen (dazu kommen wir später).
- Der Wahrheitswert einer Aussage ist <u>entweder</u> wahr oder falsch, niemals beides.
- Es gibt außer wahr und falsch keinen dritten Wahrheitswert.

Aufgabe 1: Handelt es sich bei den folgenden Sätzen um Aussagen?

(a) $3/2 \in \mathbb{Z}$

(b) $\sqrt{2}$

(c) $a^2 + b^2 = c^2$

(d) $x + y = z$ mit $x, y, z \in \mathbb{N}$

(e) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt $a^2 + b^2 = c^2$.

(f) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $n^2 = n$.

Aufgabe 2: Formulieren Sie zwei wahre Aussagen über Zahlen.

Aufgabe 3: Formulieren Sie zwei falsche Aussagen über Zahlen.

2 Negation (Verneinung)

Aussagen können negiert (= verneint) werden. Die *Negation* einer Aussage A wird mit $\overline{A}$ bezeichnet und hat den entgegengesetzten Wahrheitswert von A.

Definition: Die Negation $\overline{A}$ einer Aussage A ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Die folgende *Wahrheitswerttabelle* veranschaulicht die Definition in kompakter Form.

A	$\overline{A}$
W	F
F	W

Beispiel 3:

- A: 6 ist eine gerade Zahl. (W)

$\Rightarrow$ $\overline{A}$: 6 ist keine gerade Zahl. (F)

Beispiel 4:

- A: Alle geraden Zahlen sind durch 3 teilbar. (F)

$\Rightarrow$ $\overline{A}$: Es gibt (mindestens) eine gerade Zahl, die nicht durch 3 teilbar ist. (W)

Aufgabe 4: Negieren Sie folgende Aussagen und bestimmen Sie deren Wahrheitswert:

(a) 5 ist eine gerade Zahl.

(b) $4 = 3 + 4$

(c) Es gibt keine blauen Autos.

(d) Alle Autos sind rot.

Aufgabe 5: Erweitern Sie die Wahrheitswerttabelle um die Spalte $\overline{\overline{A}}$.

Anmerkungen:

- Negation $\neq$ Gegenteil. In der natürlichen Sprache bezeichnet *Gegenteil* das andere Ende eines Spektrums. Zum Beispiel sind „Alle Autos sind rot" und „Kein Auto ist rot" Gegenteile, jedoch nicht Negationen von einander.

3 Konjunktion (Und-Verknüpfung)

Zwei Aussagen A und B können durch „und" zu einer zusammengesetzten Aussage $A \wedge B$ verknüpft werden. Die zusammengesetzte Aussage ist nur dann wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind.

Definition 2 (Konjunktion)**.** *Die Konjunktion* $A \wedge B$ *zweier Aussagen* A *und* B *ist genau dann wahr, wenn sowohl* A *und* B *wahr sind.*

A	B	$A \wedge B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Beispiel 5:

- $\underbrace{\text{München liegt in Bayern}}_{\text{A (W)}}$ und $\underbrace{\text{[München liegt] nicht in Sachsen-Anhalt}}_{\text{B (W)}}$. (W)
- $\underbrace{\text{5 ist eine ganze Zahl}}_{\text{A (W)}}$ und $\underbrace{\text{[5] ist gerade}}_{\text{B (F)}}$. (F)
- $\underbrace{4 + 4 = 9}_{\text{A (F)}} \wedge \underbrace{4 \in \mathbb{Z}}_{\text{B (W)}}$ (F).

Aufgabe 6: Fügen Sie der Wahrheitswerttabelle folgende Spalten hinzu.

(a) $A \wedge \overline{B}$,

(b) $A \wedge \overline{A}$,

(c) $B \wedge A$,

(d) $\overline{A} \wedge \overline{B}$

(e) $\overline{A \wedge B}$.

Aufgabe 7: Geben Sie jeder der folgenden Aussagen einen sprachlichen Inhalt.

(a) $A \wedge \overline{B}$

(b) $\overline{A \wedge B}$

(c) $A \wedge \overline{A}$

4 Disjunktion (Oder-Verknüpfung)

Zwei Aussagen A und B können durch „oder" zu einer zusammengesetzten Aussage $A \vee B$ verknüpft werden. Die zusammengesetzte Aussage ist wahr, sofern mindestens eine der Aussagen A und B wahr ist.

Definition 3 (Disjunktion)**.** *Die Disjunktion* $A \vee B$ *zweier Aussagen* A *und* B *ist genau dann falsch, wenn* A *und* B *falsch sind.*

A	B	$A \vee B$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Bemerkung: Das logische „Oder" darf nicht mit dem umgangssprachlichen „entweder oder" verwechselt werden, bei dem nicht beide Aussagen gleichzeitig gelten dürfen und oft eine Entscheidung erwartet wird.

Beispiel 6:

- $\underbrace{\text{München liegt in Bayern}}_{W}$ oder $\underbrace{\text{[München liegt] in Sachsen}}_{F}$. (W)
- $\underbrace{\text{4 ist ungerade}}_{F}$ oder $\underbrace{\text{[4] ist nicht ganzzahlig}}_{F}$. (F)

Aufgabe 8: Fügen Sie der Wahrheitswerttabelle folgende Spalten hinzu.

(a) $\overline{A \vee B}$,

(b) $\overline{A} \wedge \overline{B}$,

(c) $\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$,

(d) $\overline{A} \wedge (A \vee B)$.

5 Äquivalenzen (Gleichwertigkeit)

Wir haben bereits Beispiele für logische Aussagen mit gleichen Wahrheitswerten gesehen. Solche Aussagen werden als *äquivalent* (= gleichwertig) bezeichnet. Dass zwei Aussagen A und B äquivalent sind, ist selbst wiederum eine Aussage (die also wahr oder falsch ist).

Definition 4 (Äquivalenz)**.** *Die Äquivalenz* $A \leftrightarrow B$ *zweier Aussagen* A *und* B *ist genau dann wahr, wenn* A *und* B *denselben Wahrheitswert haben.*

A	B	$A \leftrightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Beispiel 7: Wir hatten weiter oben bereits folgende Äquivalenzen nachgewiesen:

- $A \leftrightarrow \overline{\overline{A}}$
- $(A \vee B) \leftrightarrow (\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}})$

Diese Äquivalenzen sind unabhängig vom Wahrheitswert der Teilaussagen A und B allein aufgrund ihrer Struktur stets wahr. Das können wir uns anhand einer Wahrheitswerttabelle noch einmal anschauen:

A	B	$\overline{\overline{A}}$	$A \vee B$	$\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$	$A \leftrightarrow \overline{\overline{A}}$	$(A \vee B) \leftrightarrow (\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}})$
W	W	W	W	W	W	W
W	F	W	W	W	W	W
F	W	F	W	W	W	W
F	F	F	F	F	W	W

Wir sehen, dass die Spalten $A \leftrightarrow \overline{\overline{A}}$ und $(A \vee B) \leftrightarrow (\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}})$ ausschließlich den Wahrheitswert Wahr enthalten. Die Äquivalenzaussagen $A \leftrightarrow \overline{\overline{A}}$ und $(A \vee B) \leftrightarrow (\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}})$ sind somit wahr.

Anmerkungen:

- Äquivalente Aussagen besitzen identische Spalten in einer Wahrheitswerttabelle.
- Unterscheiden sich jedoch die Spalten einer Wahrheitswerttabelle, so sind die dazugehörigen Ausdrücke *nicht* äquivalent. Die Äquivalenz-Aussage ist dann falsch.
- Äquivalente Aussagen können durcheinander ersetzt werden, ohne den Sinn der Aussage zu ändern.
  - Dies bildet die Grundlage zur Vereinfachung von Aussagen.

Aufgabe 9: Bestimmen Sie die Wahrheitswerte folgender Äquivalenz-Aussagen:

(a) $A \leftrightarrow (A \vee (A \wedge \overline{A}))$

(b) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow B$

(c) $(\overline{A} \vee \overline{B}) \leftrightarrow \overline{A \wedge B}$

(d) $B \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee B)$

6 Implikationen (Folgerungen)

Zwei Aussagen A und B können zu einer *Implikation* (= Wenn-Dann-Aussage) $A \rightarrow B$ zusammengesetzt werden. Die Implikation stellt ein logisches Abhängigkeitsverhältnis zwischen den Aussagen A und B her. Sie besagt, dass B automatisch immer dann erfüllt ist, wenn A erfüllt ist.

Definition 5 (Implikation)**.** *Die Implikation $A \rightarrow B$ zweier Aussagen A und B ist genau dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist.*

Wir erhalten folgende Wahrheitswerttabelle:

A	B	$A \rightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Schauen wir uns zunächst ein motivierendes Beispiel an:

Beispiel 8: Wir betrachten folgende Implikation der Form $A \rightarrow B$:

$$\text{Wenn } \underbrace{\text{es regnet}}_{A}\text{, dann } \underbrace{\text{ist die Straße nass}}_{B}.$$

Ist diese Wenn-Dann-Aussage wahr oder falsch? Das hängt von den Wahrheitswerten der Teilaussagen A und B ab. Wir diskutieren alle möglichen Fälle separat:

- Regnet es tatsächlich (A ist wahr) und ist die Straße tatsächlich nass (B ist wahr), so spricht dies für die in der Wenn-Dann-Aussage behaupteten Kausalität.

  Fazit: Sind A und B wahr, so ist $A \rightarrow B$ ebenfalls wahr.

- Regnet es tatsächlich (A ist wahr), aber die Straße ist dennoch *nicht* nass (B ist falsch), so gilt die in der Wenn-Dann-Aussage behauptete Kausalität offenbar nicht.

  Fazit: Ist A wahr und B falsch, so ist $A \rightarrow B$ falsch.

- Was aber ist, wenn es gar nicht regnet (A ist falsch)? Die Implikation trifft darüber keine Aussage. Die Straße kann aus einem anderen Grund nass sein (beispielsweise durch einen offenen Hydranten), oder sie ist trocken. Wir vereinbaren, dass die Implikation in diesem Fall wahr ist.

  Fazit: Ist also A falsch, so ist $A \rightarrow B$ wahr (unabhängig von B).

Beispiel 9: Wenn $\underbrace{\text{4 eine ganze Zahl ist}}_{\text{A (W)}}$, dann $\underbrace{\text{ist 5 eine ganze Zahl}}_{\text{B (W)}}$. (W)

- Die Implikation ist wahr, da Prämisse und Konklusion wahr sind.

Beispiel 10: Wenn $\underbrace{\text{4 eine ganze Zahl ist}}_{\text{A (W)}}$, dann $\underbrace{\text{ist die Erde flach}}_{\text{B (F)}}$. (F)

- Die Implikation ist falsch, da die Prämisse wahr und die Konklusion falsch ist.

Beispiel 11: Wenn $\underbrace{\text{die Erde flach ist}}_{\text{A (F)}}$, dann $\underbrace{\text{leben Reptilien auf dem Mars}}_{\text{B (F)}}$. (W)

- Die Implikation ist wahr, da die Prämisse falsch ist.

Anmerkungen:

- Weil Implikationen bei falscher Prämisse wahr sind, heißt das mit anderen Worten:

  Aus einer falschen Prämisse folgt Beliebiges (= W oder F).

- Warum haben wir vereinbart, dass Implikationen bei falscher Prämisse wahr sind? Warum nicht stattdessen falsch? Das würde uns verschiedene Probleme bereiten, zum Beispiel mit All-Aussagen. (Details von All-Aussagen besprechen wir später. Hier kommt ein kleiner Vorgriff. Ungeduldige können dies überspringen und mit der nächsten Aufgabe weiter machen.)

  Beispiel 12: *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt: Wenn* n *durch* 10 *teilbar ist, dann ist* n *auch durch* 5 *teilbar.*

  Damit diese All-Aussage wahr ist, muss die Aussageform

  $$A(n): \textit{ Wenn } n \textit{ durch } 10 \textit{ teilbar ist, dann ist } n \textit{ auch durch } 5 \textit{ teilbar}$$

  für *alle* natürlichen Zahlen n wahr sein, insbesondere auch für die natürlichen Zahlen, die nicht durch 10 teilbar sind. Würden wir also (entgegen der üblichen Konventionen) vereinbaren, dass Implikationen bei falscher Prämisse *falsch* wären, wäre die All-Aussage ebenfalls falsch. Das würde uns im Folgenden große Probleme bereiten.

Aufgabe 10: Fügen Sie der Wahrheitswerttabelle folgende Spalten hinzu.

(a) $B \to A$,

(b) $A \to \overline{B}$,

(c) $\overline{A \to B}$.

Aufgabe 11: Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $(A \to B)$ und $(\overline{B} \to \overline{A})$

(b) $(A \leftrightarrow B)$ und $((A \to B) \wedge (B \to A))$

(c) $\overline{(A \to B)}$ und $(A \wedge \overline{B})$

(d) $(A \to B)$ und $(\overline{A} \vee B)$

Aufgabe 12: Formulieren Sie jeweils eine äquivalente Aussage ausschließlich unter Verwendung von Negationen, Konjunktionen und Disjunktionen. Vereinfachen Sie die Ausdrücke anschließend so weit wie möglich.

(a) $A \to B$

(b) $A \leftrightarrow (A \vee B)$

(c) $\overline{\overline{A} \to B} \;\leftrightarrow\; A$

Aufgabe 13: Formulieren Sie folgende Sätze als aussagenlogische Formeln:

(a) Wenn es morgen regnet und ein guter Film läuft, dann gehen wir ins Kino.

(b) Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, ändert sich das Wetter, oder es bleibt, wie es ist.

7 Tautologien

Besondere Bedeutung haben Aussagen, die *unabhängig* der Wahrheitswerte ihrer Teilaussagen allein aufgrund ihrer Struktur wahr sind. Eine solche Aussage wird als *Tautologie* bezeichnet.

Anmerkungen:

- Die zu einer Tautologie gehörende Spalte einer Wahrheitswerttabelle enthält nur W.

Aufgabe 14: Weisen Sie nach, dass folgende Aussagen Tautologien sind. Interpretieren Sie!

(a) $A \vee \overline{A}$

(b) $A \to A$

* (c) $((A \to B) \wedge A) \to B$

* (d) $((A \to B) \wedge \overline{B}) \to \overline{A}$

8 Aussageformen

Häufig sind mathematische Ausdrücke abhängig von einer freien Variablen, z. B.: n ist gerade. Der Ausdruck enthält also gewissermaßen eine Lücke, die gefüllt wird, indem für n ein konkreter Wert eingesetzt wird. Solche Ausdrücke nennen wir *Aussageformen*.

Definition 6 (Aussageform)**.** *Eine* Aussageform *ist ein aus Wörtern oder mathematischen Zeichen aufgebauter Ausdruck mit mindestens einer Variablen, der durch Einsetzen eines konkreten Wertes zu einer Aussage wird.*

Beispiel 13:

- $A(x)\colon x > 2$
- $A(y)\colon y$ ist ein Mensch.
- $A(n)\colon$ Ist n eine gerade Zahl, so ist n^2 ebenfalls gerade.

Die Frage „Ist es wahr, dass $x > 2$?" kann ohne Kenntnis von x nicht sinnvoll beantwortet werden. Erst durch Einsetzen eines konkreten Wertes (z.B. $x = 4$) entsteht eine sinnvolle Frage: Ist es wahr, dass $4 > 2$?

Eine Aussageform kann auf zwei Weisen zu einer Aussage werden:

- Durch Einsetzen eines konkreten Wertes für die Variable (z. B. $x = 3$).
- Durch den Einsatz von *Quantoren* (dazu gleich mehr).

8.1 Quantoren

Aussageformen können mit Hilfe von Quantoren zu Aussagen gemacht werden. Wir betrachten zwei Arten von Quantoren: Den All-Quantor $\forall$ und den Existenz-Quantor $\exists$.

8.1.1 All-Quantor und All-Aussagen

Soll eine Aussageform $A(x)$ für alle Werte eines gewissen Wertebereiches gelten, machen wir dies mit dem *All-Quantor* $\forall$ kenntlich.

Definition 7 (All-Aussage)**.** *Die All-Aussage* $\forall x \in \Omega\colon A(x)$ *ist genau dann wahr, wenn* $A(x)$ *für* alle *Werte* x *aus dem gegebenen Wertebereich* Ω *wahr ist.*

Beispiel 14:

- $\forall x \in \mathbb{R}\colon x > 2$ (Falsche Aussage, da $1 \not> 2$ und $1 \in \mathbb{R}$.)
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon x^2 \geq 0$ (Wahre Aussage)

8.1.2 Existenz-Quantor und Existenz-Aussagen

Reicht es aus, dass eine Aussageform $A(x)$ für mindestens einen Wert x aus dem Wertebereich Ω gilt, verwenden wir den *Existenz-Quantor* $\exists$.

Definition 8 (Existenz-Aussage)**.** *Die Existenz-Aussage* $\exists x \in \Omega\colon A(x)$ *ist genau dann wahr, wenn* $A(x)$ *für <u>mindestens</u> einen Wert* x *aus dem gegebenen Wertebereich* Ω *wahr ist.*

Beispiel 15:

- $\exists x \in \mathbb{R}\colon 2x = 4$ (Wahre Aussage, z.B. mit $x = 2$.)
- $\exists x \in \mathbb{R}\colon x^2 = 4$ (Wahre Aussage, z.B. mit $x = 2$ und $x = -2$.)
- $\exists x \in \mathbb{R}\colon x^2 > 4$ (Wahre Aussage, z.B. mit $x = 4$)
- $\exists x \in \mathbb{R}\colon x^2 < 0$ (Falsche Aussage)

Aufgabe 15: Geben Sie folgenden Aussagen einen sprachlichen Inhalt.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}\colon \exists y \in \mathbb{R}\colon y < x$

(b) $\exists y \in \mathbb{R}\colon \forall x \in \mathbb{R}\colon y < x$

(c) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon \exists \varepsilon \in \mathbb{R}\colon x + \varepsilon = y$

(d) $\overline{\exists n \in \mathbb{Z}\colon n^2 < 0}$

Aufgabe 16: Formulieren Sie folgende Sachverhalte als aussagenlogische Ausdrücke:

(a) Das Quadrat aller ganzen Zahlen ist nicht-negativ.

(b) Es gibt keine ganze Zahl, deren Quadrat negativ ist.

(c) Es gibt eine ganze Zahl, deren Wurzel nicht ganzzahlig ist.

(d) Jede reelle Zahl kann als Produkt zweier reeller Zahlen dargestellt werden.

(e) Für alle reellen Zahlen x und y gilt: Wenn x und y negativ sind, dann ist $x \cdot y$ positiv.

(f) Es gibt keine reelle Zahl, die nicht Summe zweier reeller Zahlen ist.

8.2 Negation von All- und Existenzaussagen

Besonderes Augenmerk gilt der Negation von All- und Existenzaussagen.

Vorüberlegung (Teil 1)

- Offenbar ist eine All-Aussage der Form $\forall x \in \Omega\colon A(x)$ bereits <u>falsch</u> , wenn es mindestens ein Element $x \in \Omega$ gibt, welche die Eigenschaft $A(x)$ nicht erfüllt.

$\rightarrow$ Die Negation der All-Aussage $\forall x \in \Omega\colon A(x)$ ist die Existenz-Aussage $\exists x \in \Omega\colon \overline{A(x)}$.

Vorüberlegung (Teil 2)

- Umgekehrt ist eine Existenz-Aussage $\exists x \in \Omega\colon A(x)$ offenbar falsch , wenn alle $x \in \Omega$ die Eigenschaft $A(x)$ verletzen.

$\rightarrow$ Die Negation der Existenz-Aussage $\exists x \in \Omega\colon A(x)$ ist die All-Aussage $\forall x \in \Omega\colon \overline{A(x)}$.

Wir halten folgende Äquivalenzen fest:

$$\overline{\forall x \in \Omega\colon A(n)} \leftrightarrow \exists x \in \Omega\colon \overline{A(x)} \qquad \text{und} \qquad \overline{\exists x \in \Omega\colon A(n)} \leftrightarrow \forall x \in \Omega\colon \overline{A(x)}.$$

Auf diese Weise lassen sich Negationen von All- und Existenzaussagen systematisch in eine für uns Menschen verständlichere Form überführen, in der Negationen so sparsam und weit hinten wie möglich vorkommen.

Aufgabe 17: Negieren Sie die Aussagen aus der vorangegangenen Aufgabe und vereinfachen Sie diese in eine möglichst verständliche Form, in der Negationen so weit hinten wie möglich auftreten. Geben Sie den Aussagen anschließend einen sprachlichen Inhalt und prüfen Sie ihren Wahrheitswert.