Teil 6: Definitionen

Der Umgang mit mathematischen Sätzen wird häufig als schwierig empfunden. Oft macht bereits die exakte mathematische Sprache Schwierigkeiten. Wir beschäftigen uns daher zunächst mit der Struktur typischer Definitionen.

Wir verwenden für die nachfolgenden Definitionen die Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$ der natürlichen Zahlen. (Die Null wird in diesem Vorkurs nicht als natürlicher Zahl betrachtet. Das werden wir für spätere Beweise ausnutzen.)

Für die natürlichen Zahlen gelten verschiedene mathematische Aussagen, von denen wir hier einige für die spätere Verwendung in Beweisen festhalten:

- Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt: $-n \notin \mathbb{N}$.
- Für alle natürlichen Zahlen $m, n, k \in \mathbb{N}$ gilt: $mn + k \in \mathbb{N}$.
- Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $n + 1/2 \notin \mathbb{N}$.
- Für keine natürlichen Zahlen n gilt $n < 0$.

1 Struktur typischer Definitionen

Folgende Definition verwendet typische mathematische Formulierungen:

Definition 1. *Eine natürliche Zahl* n *heißt genau dann* gerade*, wenn es eine natürliche Zahl* m *mit der Eigenschaft* $n = 2m$ *gibt.*

Analysieren wir diese Definition:

- Die Definition trifft eine Aussage über natürliche Zahlen n.
- Offenbar verknüpft die Definition zwei logische Aussageformen $A(n)$ und $B(n)$:
  - $A(n)$: Es gibt eine natürliche Zahl m mit $n = 2m$.
  - $B(n)$: n ist gerade.
- Die Definition besitzt durch die Formulierung *genau dann, wenn* zwei Richtungen:
  1. $A(n) \rightarrow B(n)$: Betrachten wir zunächst die Wenn-Dann-Aussage:

$$\underbrace{\text{Es gibt eine natürliche Zahl } m \text{ mit } n = 2m}_{A(n)} \rightarrow \underbrace{n \text{ ist } \textit{gerade}}_{B(n)}.$$

Eine wichtige Konsequenz dieser Implikation:

$$\underbrace{n \text{ nicht gerade}}_{\overline{B(n)}} \to \underbrace{\text{Es gibt \textit{keine} natürliche Zahl } m \text{ mit } n = 2n.}_{\overline{A(n)}}$$

Warum? Wir haben zuvor gezeigt, dass $A \to B$ und $\overline{B} \to \overline{A}$ äquivalent sind.

2. $B(n) \to A(n)$: Die Formulierung *genau dann* (= nur dann) besagt, dass eine natürliche Zahl n in keinem anderen Fall *gerade* heißen darf. Ist eine natürliche Zahl n also gerade, so muss es zwangsläufig eine natürliche Zahl m mit $n = 2m$ geben.

$$\underbrace{n \text{ ist \textit{gerade}}}_{B(n)} \to \underbrace{\text{Es gibt eine natürliche Zahl } m \text{ mit } n = 2m}_{A(n)}.$$

Nehmen wir an, das *genau dann* würde fehlen. Dann könnte es sein, dass eine natürliche Zahl noch unter einer anderen Bedingung *gerade* genannt werden darf, über welche die Definition keine Aussage trifft. Wir dürften in diesem Fall nicht von $B(n)$ auf $A(n)$ schließen.

- Die Struktur der Definition ist also $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n) \leftrightarrow B(n)$.

Beispiel 1: Beispiele für gerade Zahlen:

- $6 = 2 \cdot 3$ ist gerade, da $3 \in \mathbb{N}$.
- $2 = 2 \cdot 1$ ist gerade, da $1 \in \mathbb{N}$.

Beispiel 2: Beispiele für nicht gerade Zahlen:

- 5 ist nicht gerade, da kein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $5 = 2 \cdot m$.
- $4/3$ ist nicht gerade, da kein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $4/3 = 2 \cdot m$.

Anmerkungen:

- Wir unterscheiden hier die Begriffe *nicht gerade* und *ungerade*.
- Wir führen eine weitere Definition *ungerade* ein und zeigen später, dass eine natürliche Zahl genau dann ungerade ist, wenn sie nicht gerade ist.

Definition 2. *(ungerade) Eine natürliche Zahl* n *heißt genau dann* ungerade, *wenn es eine natürliche Zahl* $m \in \mathbb{N}$ *mit der Eigenschaft* $n = 2m - 1$ *gibt.*

Aufgabe 1: Formulieren Sie Definition 1 und 2 unter Verwendung von Quantoren.

Aufgabe 2: Ist Null nach obiger Definition eine *gerade* Zahl?

Aufgabe 3: Analysieren Sie die Struktur folgender Definition.

Definition 3. *Seien n und m beliebige natürliche Zahlen. Wir sagen,* m teilt n *(bzw. n ist teilbar durch m) und schreiben $m \mid n$ genau dann, wenn es eine natürliche Zahl k gibt, sodass $n = m \cdot k$.*

Aufgabe 4: Betrachten Sie folgende Definition.

Definition 4. *Eine natürliche Zahl n heißt* prim*, wenn sie nur durch 1 und n teilbar ist.*

Analysieren Sie die Struktur der Definition und diskutieren Sie folgende Fragen:

(a) Erfüllt diese Definition die Bedingung, dass 1 keine Primzahl ist?

(b) Ich gebe Ihnen eine natürliche Zahl n und versichere Ihnen, dass diese nach obiger Definition *nicht* prim ist. Welche Aussagen über n können Sie sicher daraus ableiten?

(c) Nun gebe ich Ihnen eine Zahl, die nach obiger Definition prim ist. Welche Aussagen können Sie nun sicher ableiten?

(d) Welche Aussage trifft die Definition über negative Zahlen? Dürfen diese prim heißen?

(e) Ist die Definition falsch?

Schlagen Sie eine alternative Definition für Primzahlen vor!

Folgende Definition eliminiert einige Schwächen von Definition 4. Wir werden uns im Folgenden auf diese Definition beziehen.

Definition 5. *Eine natürliche Zahl $n > 1$ heißt genau dann* prim*, wenn sie außer durch 1 und sich selbst durch keine weitere natürliche Zahl teilbar ist.*

Struktur der Definition:

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon n > 1 \to \left(n \text{ prim } \leftrightarrow \overline{\exists m \in \mathbb{N}\colon (m \neq 1 \wedge m \neq n) \to m \mid n}\right)$$

Aufgabe 5: Analysieren Sie die Struktur folgender Definitionen:

Definition 6 (kleiner)**.** *Eine natürliche Zahl a heißt* kleiner als *eine natürliche Zahl b (wir schreiben $a < b$) genau dann, wenn eine natürliche Zahl n existiert sodass $b = a + n$.*