Teil 8: Direkter Beweis

Die am weitesten verbreitete Beweistechnik ist der *direkte Beweis*.

Vorüberlegung:

- Wir erinnern uns an folgende Tautologie, den *Modus Ponens*: $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$
  - Ist A wahr und ist $A \rightarrow B$ wahr, dann ist B wahr.
- Die Implikation $A \rightarrow B$ „überträgt" also die Wahrheit von A auf B.
- Dieses Prinzip können wir erweitern zu einer *Argumentationskette*

$$A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \ldots \rightarrow B.$$

- Ist die erste Aussage A_0 einer Argumentationskette wahr, dann
  - wird deren Wahrheit nach rechts auf alle weiteren Aussagen übertragen.
  - Insbesondere ist gezeigt, dass die Aussage B wahr ist.

1 Beweis einfacher Aussagen

Wir betrachten zunächst Beweise einfacher (= nicht zusammengesetzter) Aussagen.

Ziel: Wir wollen formal nachweisen, dass eine Aussage A wahr ist.

Beweisstruktur:

- Ausgangspunkt: Axiom (= beweislos als wahr akzeptierte Aussage) A_0
- Vorgehen: Ableiten einer Argumentationskette $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow ... \rightarrow A$.
- Alle Zwischenschritte $A_i \rightarrow A_{i+1}$ müssen begründet sein, z. B. durch Anwendung von
  - Definitionen und Axiomen
  - bereits bewiesenen Sätzen
  - äquivalenten Umformungen
  - nachvollziehbaren Schlussfolgerungen.

Beispiel 1: Wir beweisen die Aussage: 6 ist gerade.

Beweis.

	Aussage	Begründungen
	$6 = 3 \cdot 2$	(Axiom)
$\rightarrow$	$\exists m \in \mathbb{N}\colon 6 = 2m$	(Axiom: $3 \in \mathbb{N}$)
$\rightarrow$	6 ist gerade	(Definition „gerade“, Axiom: $6 \in \mathbb{N}$)

□

Analysieren wir diesen Beweis:

- Wir beginnen mit einer als wahr angenommenen Aussage: $6 = 3 \cdot 2$.
- Da 3 eine natürliche Zahl ist (wird hier beweislos als Axiom akzeptiert), können wir die vorangegangene Aussage zu dieser Existenzaussage abschwächen.
- Wir wenden nun die Definition „gerade“ auf den Ausdruck an.
- Im Laufe des Beweises verwenden wir verschiedene Axiome: $6 = 3 \cdot 2$, $3 \in \mathbb{N}$, $6 \in \mathbb{N}$.
- Jeder einzelne Schritt ist begründet. Die Argumentationskette ist lückenlos.

Anmerkungen:

- Streng genommen haben wir nur folgende Implikation bewiesen:

$$(3 \in \mathbb{N} \wedge 6 \in \mathbb{N} \wedge 6 = 3 \cdot 2) \rightarrow 6 \in \mathbb{N}.$$

- Wir können keine Aussagen „aus dem luftleeren Raum heraus“ beweisen. Wir benötigen stets einen Ausgangspunkt, auf dem wir den Beweis aufbauen. Das sind Axiome.
- Ein Großteil der Mathematik ist axiomatisch aufgebaut.

Aufgabe 1: Beweisen Sie mittels direktem Beweis:

(a) 12 ist gerade.

(b) $3 \mid 12$

(c) $1 < 4$

(d) 6 ist nicht prim.

2 Beweis von All-Aussagen

Ein Spezialfall liegt vor, wenn die zu beweisende Aussage eine All-Aussage ist.

Ziel: Beweis einer Aussage $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n)$.

Beweisstruktur:

- Wir betrachten eine *beliebige* (= irgendeine, uns unbekannte) natürliche Zahl n.
  - Diese dient im Folgenden stellvertretend für *alle* natürlichen Zahlen.
  - Alle Aussagen über n gelten somit für allgemein für alle natürlichen Zahlen.
- Ausgangspunkt (*Prämisse*): $n \in \mathbb{N}$.
- Vorgehen: Ableiten einer Argumentationskette

$$n \in \mathbb{N} \to A_1(n) \to A_2(n) \to \ldots \to A(n).$$

- Alle Zwischenschritte müssen begründet sein, z. B. durch Anwendung von
  - Definitionen und Axiomen
  - bereits bewiesenen Sätzen
  - äquivalenten Umformungen
  - nachvollziehbaren Schlussfolgerungen.

Beispiel 2: Wir beweisen die Aussage: $\forall n \in \mathbb{N}$: $4n + 6$ ist gerade.

Beweis. Sei n eine beliebige natürliche Zahl.

	Aussage	**Begründung**
	$n \in \mathbb{N}$	(Prämisse)
$\to$	$2n + 3 \in \mathbb{N}$	(Wenn $m, n, k \in \mathbb{N}$, dann $m \cdot n + k \in \mathbb{N}$)
$\to$	$2 \cdot (2n + 3) \in \mathbb{N}$	(Wenn $m, n \in \mathbb{N}$, dann $m \cdot n \in \mathbb{N}$)
$\to$	$2 \cdot (2n + 3)$ ist gerade	(Definition „gerade“)
$\to$	$4n + 6$ ist gerade	($2 \cdot (2n + 3) = 4n + 6$)

□

Interessant ist der vorletzte Schritt. Wir durften die Definition „gerade“ anwenden, weil wir zuvor gezeigt haben, dass

- $2 \cdot (2n + 3)$ eine natürliche Zahl ist, und dass
- $2n + 3$ eine natürliche Zahl ist.

Aufgabe 2: Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels direkter Beweise:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$: $1 \mid n$

(b) Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt: $a \mid (ab)$.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $6n + 5$ ist ungerade.

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n^2 + 2n + 1$ ist nicht prim.

3 Beweis von Implikationen

Der häufigste Anwendungsfall direkter Beweise sind Aussagen $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n) \to B(n)$.

Ziel: Nachweis der All-Aussage $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n) \to B(n)$.

Beweisstruktur

- Wir betrachten eine beliebige natürliche Zahl n.
- Ausgangspunkt (*Prämisse*): $A(n)$.
- Vorgehen: Ableiten einer Argumentationskette

$$A(n) \to A_1(n) \to A_2(n) \to \ldots \to B(n).$$

- Alle Zwischenschritte müssen begründet sein, z. B. durch
  - Anwendung von Definitionen
  - Anwendung bereits bewiesener Sätze
  - Äquivalente Umformungen
  - Nachvollziehbare Schlussfolgerungen

Beispiel 3: Wir beweisen folgenden Satz.

Satz 1. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn n durch 4 teilbar ist, dann ist n auch durch 2 teilbar.*

Der Satz hat die Struktur $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n) \to B(n)$.

- $A(n)\colon 4 \mid n$
- $B(n)\colon 2 \mid n$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl.

	Aussage	Begründung
	$4 \mid n$	(Prämisse)
$\to$	$\exists m \in \mathbb{N}\colon n = 4m$	(Definition „teilbar“)
$\to$	$\exists m \in \mathbb{N}\colon n = 2 \cdot 2m$	$(4 = 2 \cdot 2)$
$\to$	$\exists k \in \mathbb{N}\colon n = 2k$	(Wenn $m \in \mathbb{N}$, dann $k = 2m \in \mathbb{N}$)
$\to$	$2 \mid n$	(Defintion „teilbar“)

$\square$

Beispiel 4: Wir beweisen folgenden Satz:

Satz 2. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn n gerade ist, dann ist n^2 ebenfalls gerade.*

Der Satz hat die Struktur $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n) \to A(n^2)$.

- $A(x)$: x ist gerade.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl.

	Aussage	**Begründung**
	n ist gerade	(Prämisse)
$\to$	$\exists m \in \mathbb{N}\colon n = 2m$	(Definition „gerade“)
$\to$	$\exists m \in \mathbb{N}\colon n^2 = (2m)^2$	(Beidseitiges Quadrieren erhält Gleichheit)
$\to$	$\exists m \in \mathbb{N}\colon n^2 = 2 \cdot 2m^2$	(Potenzgesetze)
$\to$	$\exists k \in \mathbb{N}\colon n^2 = 2 \cdot k$	(Wenn $m \in \mathbb{N}$, dann $k = 2m^2 \in \mathbb{N}$)
$\to$	n^2 ist gerade.	(Definition „gerade“)

□

Aufgabe 3: Beweisen Sie folgende Aussagen mittels direkter Beweise:

(a) Für alle natürlichen m, n gilt: Wenn $n < m$, dann $n^2 < m^2$.

(b) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn m gerade ist, dann ist $m \cdot n$ gerade.

(c) Die Summe zweier gerader natürlicher Zahlen ist gerade.

(d) Für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $x < y$, dann $x + z < y + z$.

(e) Für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$ gilt: Aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$.

(f) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}\colon (a \mid b) \wedge (b \mid c) \to (a \mid c)$

(g) $\forall a, b, c, x, y \in \mathbb{N}\colon (a \mid b) \wedge (a \mid c) \to (a \mid (xb + yc))$

4 Beweis von Äquivalenzen

Ebenfalls sehr häufig sind direkte Beweise für Aussagen der Form $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n) \leftrightarrow B(n)$.

Ziel: Nachweis der All-Aussage $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n) \leftrightarrow B(n)$.

Vorüberlegung:

- Wir haben zuvor gesehen, dass $A \leftrightarrow B$ logisch äquivalent ist zu $(A \to B) \wedge (B \to A)$.

Beweisstruktur

- Beweis der *Hin-Richtung*: $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n) \to B(n)$
- Beweis der *Rück-Richtung*: $\forall n \in \mathbb{N}\colon B(n) \to A(n)$
- Beide Teile des Beweises können *unabhängig* voneinander bewiesen werden.
- Für die beiden Richtungen können verschiedene Beweistechniken verwendet werden.

Beispiel 5: Wir beweisen folgenden Satz.

Satz 3. *Für alle natürlichen Zahlen* m *und* n *gilt:* $n < m$ *genau dann, wenn* $m - n \in \mathbb{N}$.

Der Satz hat die Struktur $\forall m, n \in \mathbb{N}\colon n < m \leftrightarrow m - n \in \mathbb{N}$.

- Hin-Richtung: Zu zeigen ist: $\forall m, n \in \mathbb{N}\colon n < m \to m - n \in \mathbb{N}$.

  Beweis. Seien m, n beliebige natürliche Zahlen. Es gilt

	Aussage	**Begründung**
	$n < m$	(Prämisse)
$\to$	$\exists k \in \mathbb{N}\colon m = k + n$	(Definition „kleiner“)
$\to$	$\exists k \in \mathbb{N}\colon m - n = k + n - n$	(Beidseitige Subtr. von n erhält Gleichheit)
$\to$	$\exists k \in \mathbb{N}\colon m - n = k$	($\forall x \in \mathbb{R}\colon x - x = 0$)
$\to$	$m - n \in \mathbb{N}$	(Konkretisieren)

  □

- Rück-Richtung: Zu zeigen ist: $\forall m, n \in \mathbb{N}\colon m - n \in \mathbb{N} \to n < m$.

  Beweis. Seien m, n beliebige natürliche Zahlen. Es gilt

	Aussage	**Begründung**
	$m - n \in \mathbb{N}$	(Prämisse)
$\to$	$\exists k \in \mathbb{N}\colon m - n = k$	(Umformulierung vorangegangener Aussage)
$\to$	$\exists k \in \mathbb{N}\colon m - n + n = k + n$	(Beidseitige Addition. von n erhält Gleichheit)
$\to$	$\exists k \in \mathbb{N}\colon m = k + n$	($\forall x \in \mathbb{R}\colon x - x = 0$)
$\to$	$n < m \in \mathbb{N}$	(Definition „kleiner”)

  □

Hier haben wir einen Beweis, in dem die Hinrichtung eine *Umkehrung* der Rückrichtung ist, und umgekehrt. Das liegt daran, dass jeder Schritt der Argumentationskette *umkehrbar* ist. (Es handelt sich bei den Zwischenschritten nicht nur um Implikationen, sondern um Äquivalenzen.) Wenn dies der Fall ist, können wir beide Richtungen des Beweises in einem Schritt abhandeln:

Beweis. Seien m, n beliebige natürliche Zahlen. Es gilt

	Aussage	**Begründung**
	$n < m$	
$\leftrightarrow$	$\exists k \in \mathbb{N}\colon m = k + n$	(Definition „kleiner“)
$\leftrightarrow$	$\exists k \in \mathbb{N}\colon m - n = k + n - n$	(Beidseitige Subtr. von n erhält Gleichheit)
$\leftrightarrow$	$\exists k \in \mathbb{N}\colon m - n = k$	($\forall x \in \mathbb{R}\colon x - x = 0$)
$\leftrightarrow$	$m - n \in \mathbb{N}$	(Umformulierung)

$\square$