Teil 9: Widerspruchsbeweis

Im letzten Abschnitt haben wir den direkten Beweis kennengelernt. Wir lernen nun eine noch vielseitigere Beweistechnik kennen: den *Widerspruchsbeweis*.

Vorüberlegung:

- Widerspruch = falsche Aussage (F). Beispiel:
  - falsche mathematische Aussage: $1 = 2$ oder $2/3 \in \mathbb{N}$,
  - inkonsistente logische Aussage, z.B. $\mathsf{A} \wedge \overline{\mathsf{A}}$.
- Angenommen, wir könnten mittels einer Argumentationskette

  $$\mathsf{A} \to \mathsf{A}_1 \to \mathsf{A}_2 \to \ldots \to \mathsf{F}$$

  aus einer Aussage A eine falsche Aussage F (= Widerspruch) ableiten.
- Wenn jeder der Zwischenschritte korrekt war, muss A falsch sein. Warum?
  - Es gilt: $((\mathsf{A} \to \mathsf{B}) \wedge \overline{\mathsf{B}}) \to \overline{\mathsf{A}}$ (*Modus Tollens*).
  - In Worten: Ist $\mathsf{A} \to \mathsf{B}$ ein gültiger Schluss und B falsch, so ist A auch falsch.
  - Die „Falschheit“ von F wird also von rechts nach links auf A übertragen.
- Da A falsch ist, muss $\overline{\mathsf{A}}$ wahr sein.
- Analog zeigt man, dass A wahr ist, wenn man aus $\overline{\mathsf{A}}$ einen Widerspruch ableitet.

1 Beweis einfacher Aussagen

Ziel: Beweis einer Aussage A.

Beweisstruktur

- Ausgangspunkt: Die zu beweisende Aussage A ist falsch, d. h. $\overline{\mathsf{A}}$ ist wahr.
- Vorgehen: Ableiten einer Argumentationskette bis zu einem Widerspruch:

  $$\overline{\mathsf{A}} \to \mathsf{A}_1 \to \mathsf{A}_2 \to \ldots \to \mathsf{F}.$$

- Beim Erreichen eines Widerspruchs wissen wir: Die Aussage $\overline{\mathsf{A}}$ war falsch.
- Die Negation $\overline{\overline{\mathsf{A}}}$ muss somit wahr sein. Da $\overline{\overline{\mathsf{A}}}$ äquivalent zu A ist, ist auch A wahr.

- Alle Zwischenschritte müssen bewiesen bzw. begründet sein.

Beispiel 1: Wir beweisen: 5 ist nicht gerade.

Widerspruchsbeweis. Durch Negation der zu beweisenden Aussage erhalten wir die Widerspruchsannahme: 5 ist gerade. Zum Zwecke eines Widerspruchsbeweises nehmen wir also an, 5 wäre eine gerade Zahl und leiten daraus eine falsche Aussage ab:

	Aussage	**Begründung**
	5 ist gerade	(Widerspruchsannahme)
$\rightarrow$	$\exists m \in \mathbb{N}\colon 5 = 2 \cdot m$	(Definition „gerade“)
$\rightarrow$	$\exists m \in \mathbb{N}\colon 5/2 = m$	(Beidseitiges Teilen durch 2 erhält Gleichheit)
$\rightarrow$	$5/2 \in \mathbb{N}$	(Vereinfachen)
$\rightarrow$	F	(Axiom: $5/2 \notin \mathbb{N}$)

Hier liegt offenbar ein Widerspruch vor, da keine natürliche Zahl mit dem Wert 5/2 existiert. Da alle Zwischenschritte schlüssig begründet und offenbar korrekt sind, muss unsere Widerspruchsannahme falsch sein. Deren Negation ist also wahr: 5 ist nicht gerade. $\square$

Aufgabe 1: Beweisen Sie per Widerspruchsbeweis:

(a) 5 ist nicht durch 4 teilbar ($4 \nmid 5$).

(b) 10 ist gerade.

(c) $4 \geq 2$

(d) 6 ist nicht prim.

(e) 5 ist prim.

2 Beweis von All-Aussagen

Ziel: Beweis einer Aussage der Form $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n)$.

Vorüberlegung:

- Angenommen, die zu beweisende Aussage $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n)$ ist <u>falsch</u>.
- Dann muss die Negation $\exists n \in \mathbb{N}\colon \overline{A(n)}$ der zu beweisenden Aussage wahr sein.
- Die Negation der zu beweisenden Aussage nennen wir *Widerspruchsannahme*.
- Können wir zeigen, dass aus der Widerspruchsannahme eine falsche Aussage folgt,
  - muss die Widerspruchsannahme ebenfalls falsch sein,
  - muss die ursprünglich zu beweisende Aussage wahr sein.

Beweisstruktur:

- Ausgangspunkt: Widerspruchsannahme: $\exists n \in \mathbb{N}\colon \overline{A(n)}$.
- Vorgehen: Wir leiten mit einer Argumentationskette

$$\exists n \in \mathbb{N}\colon \overline{A(n)} \to A_1(n) \to A_2(n) \to \ldots \to F$$

  aus unserer Widerspruchsannahme eine falsche Aussage (= Widerspruch) F ab.
- Alle Zwischenschritte müssen bewiesen bzw. begründet sein.

Beispiel 2: Wir beweisen: Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $2n + 1$ ist nicht gerade.

Durch Negation des zu beweisenden Satzes erhalten wir die Widerspruchsannahme:

$$\begin{aligned} & \overline{\forall n \in \mathbb{N}\colon 2n + 1 \text{ nicht gerade}} \\ \leftrightarrow \quad & \exists n \in \mathbb{N}\colon \overline{2n + 1 \text{ nicht gerade}} \\ \leftrightarrow \quad & \exists n \in \mathbb{N}\colon 2n + 1 \text{ gerade} . \end{aligned}$$

Widerspruchsbeweis.

	Aussage	**Begründung**
	$\exists n \in \mathbb{N}\colon 2n + 1$ gerade	(Widerspruchsannahme)
$\to$	$\exists n, m \in \mathbb{N}\colon 2n + 1 = 2m$	(Definition „gerade“)
$\to$	$\exists n, m \in \mathbb{N}\colon n + 1/2 = m$	(Division durch 2 erhält Gleichheit)
$\to$	$\exists n \in \mathbb{N}\colon n + 1/2 \in \mathbb{N}$	(Vereinfachung)
$\to$	F	($\forall n \in \mathbb{N}\colon n + 1/2 \notin \mathbb{N}$)

□

Aufgabe 2: Beweisen Sie folgende Aussagen per Widerspruchsbeweis:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}\colon 4n + 6$ ist gerade.

(b) Für keine natürliche Zahl n gilt: $n < n$.

(c) Es gibt keine natürlichen Zahlen m und n, sodass gilt:

$$\frac{1}{m+n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$$

(d) * Für alle natürlichen Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ gilt: $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.

3 Beweis von Implikationen

Ziel: Beweis einer Aussage der Form $\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n) \to B(n)$.

Vorüberlegung:

- Sei $A \to B$ eine Implikation.
- Wie die folgende Wahrheitswerttabelle zeigt, ist $\overline{A \to B}$ äquivalent zu $A \wedge \overline{B}$

A	B	$\overline{B}$	$A \wedge \overline{B}$	$\overline{A \to B}$
W	W	F	F	F
W	F	W	W	W
F	W	F	F	F
F	F	W	F	F

- Die Negation von $A(n) \to B(n)$ ist also äquivalent zu $A(n) \wedge \overline{B(n)}$.

Beweisstruktur

- Ausgangspunkt: Widerspruchsannahme (= Negation der zu beweisenden Aussage):

$$\begin{aligned} & \overline{\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n) \to B(n)} \\ \leftrightarrow\quad & \exists n \in \mathbb{N}\colon \overline{A(n) \to B(n)} \\ \leftrightarrow\quad & \exists n \in \mathbb{N}\colon A(n) \wedge \overline{B(n)} \qquad \text{Wichtig: Wir verwenden diese Form!} \end{aligned}$$

- Vorgehen: Ableiten einer Argumentationskette

$$\left(\exists n \in \mathbb{N}\colon A(n) \wedge \overline{B(n)}\right) \to A_1(n) \to A_2(n) \to \ldots \to F$$

  bis zu einem Widerspruch.
- Alle Zwischenschritte müssen bewiesen bzw. begründet sein.

Beispiel 3: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn n nicht gerade ist, dann ist $n/2$ keine natürliche Zahl.

Struktur der zu beweisenden Aussage:

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \underbrace{n \text{ nicht gerade}}_{A(n)} \to \underbrace{n/2 \notin \mathbb{N}}_{B(n)}$$

Durch Negation der zu beweisenden Aussage erhalten wir die Widerspruchsannahme:

$$\begin{aligned} & \overline{\forall n \in \mathbb{N}\colon n \text{ nicht gerade } \to n/2 \notin \mathbb{N}} \\ \leftrightarrow\quad & \exists n \in \mathbb{N}\colon \overline{n \text{ nicht gerade } \to n/2 \notin \mathbb{N}} \\ \leftrightarrow\quad & \exists n \in \mathbb{N}\colon n \text{ nicht gerade } \wedge n/2 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Widerspruchsbeweis.

	Aussage	**Begründung**
	$\exists n \in \mathbb{N}\colon n$ nicht gerade $\wedge\, n/2 \in \mathbb{N}$	(Widerspruchsannahme)
$\rightarrow$	$\exists n \in \mathbb{N}\colon \overline{\exists m \in \mathbb{N}\colon n = 2m} \,\wedge\, n/2 \in \mathbb{N}$	(Definition „gerade“)
$\rightarrow$	$\exists n \in \mathbb{N}\colon \overline{\exists m \in \mathbb{N}\colon n/2 = m} \,\wedge\, n/2 \in \mathbb{N}$	(Beids. Division durch 2 erhält Gleichheit)
$\rightarrow$	$\exists n \in \mathbb{N}\colon n/2 \notin \mathbb{N} \,\wedge\, n/2 \in \mathbb{N}$	(Vereinfachung)
$\rightarrow$	F	(Inkonsistente logische Aussage)

Hier liegt offenbar ein Widerspruch vor, da $n/2$ nicht gleichzeitig natürlich und nicht natürlich sein kann. □

Aufgabe 3: Beweisen Sie folgende Aussagen per Widerspruchsbeweis:

(a) Für alle natürlichen n gilt: Wenn n gerade ist, dann ist $n + 1$ nicht gerade.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn n gerade ist, dann ist n^2 ebenfalls gerade.

(c) Für alle natürlichen Zahlen x und y gilt: Wenn $x < y$, dann $y \geq x$.

(d) $\forall x, y \in \mathbb{N}\colon (x^2 + y = 11 \wedge y \neq 7) \rightarrow x \neq 2$

(e) Für alle natürlichen n gilt: Wenn $n < m$, dann ist $n - m \notin \mathbb{N}$.