Teil 1: Summen

1 Einführung und Notation

Summen kennt jeder bereits aus der Schule. Sie bestehen aus einer Folge von *Summanden*. Bei langen Summen mit vielen Summanden wird es unhandlich, wenn nicht sogar unmöglich, diese alle aufzuschreiben. Solche Summen über endliche (oder unendliche) Zahlenfolgen sind aber ein elementares Konzept in vielen Bereichen der Informatik. Hier lernen wir deshalb eine Kurznotation kennen, mit der auch sehr lange oder sogar unendliche Summen kompakt ausgedrückt werden können.

Beispiel 1: Die folgende Summe hat 5 Summanden (und den Wert 150).

$$10 + 20 + 30 + 40 + 50 = 150$$

- Im Beispiel hat der erste Summand den Wert 10, der zweite den Wert 20 und so weiter.
- Typischerweise lassen sich die Summanden in Abhängigkeit einer *Laufvariable* k beschreiben.
- Der Wert des Summanden zur Laufvariable k wird mit a_k bezeichnet.
- Im Beispiel kann man als Laufvariable $k = 1, \ldots, 5$ verwenden.
- Die Summanden haben dann die Form $a_k = 10k$.

In kompakter Form wird eine Summe über folgende Notation beschrieben:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n.$$

Bedeutung

- Laufvariable k: durchläuft alle ganzen Zahlen vom *Startwert* bis zum *Endwert* einmal.
- Startwert $m \in \mathbb{Z}$: kleinster Wert für die Laufvariable k.
- Endwert $n \in \mathbb{Z}$: größter Wert für die Laufvariable k.
- Summand a_k: Summanden in Abhängigkeit der Laufvariable k.

Die Summe aus Beispiel 1 in Summennotation:

$$\sum_{k=1}^{5} 10k = 10 + 20 + 30 + 40 + 50 = 150.$$

Hier ist der Startwert $m = 1$, der Endwert $n = 5$. Die Summanden haben die Form $a_k = 10k$.

Aufgabe 1: Wie viele Summanden hat eine Summe mit Startwert m und Endwert n?

Bemerkung: Die Form der Summe ist nicht eindeutig. Wir können die Summe aus Beispiel 1 unter Verwendung anderer Start- und Endwerte beispielsweise auch schreiben als:

$$\sum_{k=2}^{6}(10k - 10) = (20 - 10) + (30 - 10) + (40 - 10) + (50 - 10) + (60 - 10) = 150.$$

Hier ist $m = 2$ und $n = 6$. Die Summanden haben die Form $a_k = 10k - 10$.

Aufgabe 2: Schreiben Sie folgende Summen in expliziter Form und werten Sie diese aus!

(a) $\sum_{k=1}^{5} k^2$

(b) $\sum_{k=-1}^{3}(2k - 1)$

(c) $\sum_{i=0}^{3}(-1)^i$

(d) $\sum_{i=12}^{15} |i - 14|$

Aufgabe 3: Schreiben Sie unter Verwendung von Summenzeichen!

(a) $3 + 6 + 9 + 12 + 15$

(b) $-3 - 6 - 9 - 12 - 15$

(c) $2 + 2 + 2 + 2 + 2$

(d) $5 + 12 + 19 + 26 + 33 + 40 + 47 + 54 + 61$

(e) Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen

! (f) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8$

2 Rechenregeln

Summen können durch Anwendung von Rechenregeln ohne großen Rechenaufwand ausgewertet werden. Im Folgenden bezeichnen $m, n \in \mathbb{N}$ natürliche Start- und Endwerte sowie $a_k, b_k, c \in \mathbb{R}$ reellwertige Summanden in Abhängigkeit von einer Laufvariable $k \in \mathbb{Z}$.

2.1 Abspalten und Einziehen von Summanden

Wir können eine Summe in zwei (oder mehr) Summen aufspalten. Dazu wählen wir eine beliebige ganze Zahl i als neuen Endwert (und $i + 1$ als neuen Startwert). Es gilt:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{i} a_k + \sum_{k=i+1}^{n} a_k.$$

Beispiel 2: Hier ist $m = 1$, $n = 9$, $a_k = k^2$ und $i = 4$.

$$\sum_{k=1}^{9} k^2 = \sum_{k=1}^{4} k^2 + \sum_{k=5}^{9} k^2.$$

Warum gilt die Regel?

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} a_k &= a_m + \ldots + a_i + a_{i+1} + \ldots + a_n && \text{(Ausschreiben)} \\
&= (a_m + \ldots + a_i) + (a_{i+1} + \ldots + a_n) && \text{(Setzen von Klammern)} \\
&= \sum_{k=m}^{i} a_k + \sum_{k=i+1}^{n} a_k. && \text{(Zusammenfassen)}
\end{aligned}$$

Von besonderer Bedeutung ist das Abspalten des ersten (oder letzten) Summanden:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + \sum_{k=m+1}^{n} a_k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n-1} a_k + a_n.$$

Hinweis: Selbstverständlich gilt die Regel in beide Richtungen. Das heißt:

$$\sum_{k=m}^{i} a_k + \sum_{k=i+1}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Aufgabe 4: Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke!

(a) $\left(\sum_{k=1}^{5} k\right) + \left(\sum_{k=6}^{10} k\right)$

(b) $\left(\sum_{k=1}^{5} k^2\right) + \left(\sum_{k=5}^{10} k^2\right)$

(c) $\left(\sum_{k=1}^{10} k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{4} k^2\right)$

2.2 Assoziativgesetz

Für beliebige Summanden der Form $a_k + b_k$ gilt:

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k.$$

Beispiel 3: Hier: $a_k = k$ und $b_k = 2$.

$$\sum_{k=1}^{10}(k+2) = \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 2.$$

Warum gilt Assoziativität?

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k) &= (a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \ldots + (a_n + b_n) && \text{(Ausschreiben der Summe)} \\
&= a_m + b_m + a_{m+1} + b_{m+1} + \ldots + a_n + b_n && \text{(Weglassen von Klammern)} \\
&= a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n + b_m + b_{m+1} + \ldots + b_n && \text{(Umordnen der Summanden)} \\
&= (a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n) + (b_m + b_{m+1} + \ldots + b_n) && \text{(Neue Klammern)} \\
&= \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k.
\end{aligned}$$

Achtung: Im Allgemeinen ist jedoch:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \cdot b_k \neq \left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=m}^{n} b_k\right).$$

Aufgabe 5: Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke!

(a) $\sum_{k=1}^{5} 10k + \sum_{k=1}^{5} 2$

(b) $\left(\sum_{k=1}^{5}(2-k)\right) + \left(\sum_{k=1}^{5} k\right) - \left(\sum_{k=1}^{5} 2\right)$

(c) $\sum_{k=0}^{11}(4k^2+1) - \sum_{k=0}^{11}(3k^2-2k)$

Aufgabe 6: Sind folgende Umformungen korrekt?

(a) $\sum_{k=1}^{10} 3k = \sum_{k=2}^{9} 3k + 33$

(b) $\sum_{k=1}^{10} 3k = \left(\sum_{k=1}^{10} 3\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{10} k\right)$

(c) $\sum_{k=1}^{10}(3k+4) = \left(\sum_{k=1}^{10} 3k\right) + \left(\sum_{k=1}^{10} 4\right)$

2.3 Distributivgesetz

Sei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante. *Achtung*: Die Konstante c darf nicht von k abhängen!

$$\sum_{k=m}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Beispiel 4: Hier ist $a_k = k$ und $c = 2$. Da der Faktor 2 nicht von k abhängt, können wir diesen aus der Summe ausklammern.

$$\sum_{k=1}^{10} 2k = 2 \cdot \sum_{k=1}^{10} k.$$

Warum gilt das Gesetz?

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} c \cdot a_k &= c \cdot a_m + c \cdot a_{m+1} + \ldots + c \cdot a_n && \text{(Ausschreiben)} \\
&= c \cdot (a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n) && \text{(Ausklammern von c)} \\
&= c \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k && \text{(Zusammenfassen).}
\end{aligned}$$

2.4 Summen von Konstanten

Ein wichtiger Spezialfall sind Summen von Konstanten:

$$\sum_{k=m}^{n} c = c \cdot \sum_{k=m}^{n} 1 = c \cdot \underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{n-m+1 \text{ Summanden}} = c \cdot (n - m + 1).$$

Beispiel 5:

$$\sum_{k=0}^{n} 2 = 2 \cdot (n + 1) = 2n + 2.$$

Aufgabe 7: Werten Sie folgende Summen aus!

(a) $\frac{1}{c} \cdot \sum_{k=1}^{50} 2c$

(b) $\sum_{i=1}^{50}(4i + 3i^2 - 20) + \sum_{i=1}^{50}(3i - 4i^2 + 10) - \sum_{i=1}^{50}(30 + 7i - i^2)$

(c) $\sum_{l=4}^{10}(l^3 - 3l^2 + 20) - \sum_{l=3}^{10}(-3l^2 + l^3 + 18)$

2.5 Indexverschiebung

Für beliebige $r \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m-r}^{n-r} a_{k+r}.$$

Wir können die Summanden der Form a_k durch a_{k+r} ersetzen, indem wir alle Vorkommen der Laufvariable k durch $(k+r)$ ersetzen.
Wenn $a_k = 5k$ gilt, haben wir beispielsweise die Werte $\ldots a_{-1} = -5$, $a_0 = 0$, $a_1 = 5$, $a_2 = 10$, $a_3 = 15$, $a_4 = 20 \ldots$. Dann erhalten wir mit $r = 2$ eine Verschiebung dieser Zahlenfolge um 2 Stellen. Damit ergibt sich für $k = 1$ der Summand $a_{1+2} = a_3 = 15$.

Beispiel 6: Hier ist $a_k = 10k$, das heißt $a_{k+r} = 10 \cdot (k+r) = 10k + 10r$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=21}^{25} 10k &= \sum_{k=1}^{5} (10k + 200) && \text{(Indexverschiebung: } r = 20\text{)} \\
&= \sum_{k=1}^{5} 10k + \sum_{k=1}^{5} 200 && \text{(Assoziativität)} \\
&= \sum_{k=1}^{5} 10k + 200 \cdot 5 && \text{(Summen von Konstanten)} \\
&= 10 \sum_{k=1}^{5} k + 200 \cdot 5 && \text{(Distributivität)} \\
&= 10 \cdot (1+2+3+4+5) + 200 \cdot 5 && \text{(Explizite Form)} \\
&= 10 \cdot 15 + 200 \cdot 5 && \text{(Vereinfachen)} \\
&= 150 + 1000 && \text{(Vereinfachen)} \\
&= 1150 && \text{(Vereinfachen)}
\end{aligned}$$

Warum gilt die Regel?

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} a_k &= a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n && \text{(Ausschreiben)} \\
&= a_{m+(r-r)} + a_{m+1+(r-r)} + \ldots + a_{n+(r-r)} && (r - r = 0) \\
&= a_{(m-r)+r} + a_{(m-r+1)+r} + \ldots + a_{(n-r)+r} && \text{(Summanden umordnen)} \\
&= \sum_{k=m-r}^{n-r} a_{k+r}. && \text{(Zusammenfassen)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 8: Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke!

(a) $\sum_{k=11}^{15}(k-10)$

(b) $\sum_{k=9}^{17}(k-6)^2 - \sum_{k=1}^{7}(k+2)^2$

(c) $\sum_{k=1}^{10}(k+2)^4 - \sum_{k=1}^{12} k^4$

(d) $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k} + \sum_{k=12}^{30} \frac{1}{10-k}$

(e) $\sum_{k=7}^{89} k \cdot (k-2)^3 - \sum_{k=5}^{87}(k^4 + 2k^3)$

3 Besonderheiten

Folgende Besonderheiten im Umgang mit Summen sollte man kennen.

3.1 Leere Summe

Für $m > n$ definiert man:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0.$$

Beispiel 7:

$$\sum_{k=10}^{5} 2k = 0.$$

3.2 Teleskop-Summe

Eine Teleskop-Summe hat die Form

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_m - b_{n+1}.$$

Kann man die Summanden a_k also als Differenz $b_k - b_{k+1}$ zweier von k abhängiger Ausdrücke darstellen, so kann man die Summe sehr leicht auswerten.

Beispiel 8: Im folgenden Beispiel ist $a_k = k^2 - (k+1)^2$, d. h. $b_k = k^2$.

$$\sum_{k=3}^{9} (k^2 - (k+1)^2).$$

Es folgt:

$$\sum_{k=3}^{9} (k^2 - (k+1)^2) = 3^2 - (9+1)^2 = 9 - 100 = -91.$$

Aufgabe 9: Leiten Sie die Regel

$$\sum_{k=m}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_m - b_{n+1}$$

zur Auswertung von Teleskop-Summen aus den anderen Rechenregeln her!

3.3 Gaußsche Summenformel

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen taucht in vielen Anwendungen auf. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Beispiel 9:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{5} 10k = 10 \sum_{k=1}^{5} k & \qquad \text{(Distributivität)} \\
= 10 \cdot \frac{5^2 + 5}{2} & \qquad \text{(Gaußsche Summenformel)} \\
= 10 \cdot 15 & \qquad \text{(Vereinfachen)} \\
= 150. &
\end{aligned}$$

Für Fortgeschrittene: Warum gilt die Regel? Intuitiv kann man argumentieren, dass 1 (die erste Zahl) und n (die letzte Zahl) zusammen $n + 1$ ergeben, 2 und $n - 1$ genauso. Es gibt $n/2$ solcher Paare. Eine solche Argumentation funktioniert allerdings nicht immer. Deshalb führen wir nun einen etwas längeren formalen Beweis.

Wir starten mit

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k &= 1 + 2 + \ldots + n \\
&= n + (n-1) + \ldots + 1 && \text{(Umkehren der Summationsreihenfolge)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (n + 1 - k) && \text{(Überführen in Summenform)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n + \sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} k && \text{(Assoziativitätsgesetz)} \\
&= n^2 + n - \sum_{k=1}^{n} k. && \text{(Summen von Konstanten)}
\end{aligned}$$

Zusammenfassend haben wir bisher folgenden Zusammenhang nachgewiesen:

$$\sum_{k=1}^{n} k = n^2 + n - \sum_{k=1}^{n} k.$$

Addieren wir den Term $\sum_{k=1}^{n} k$ auf beiden Seiten der Gleichung, erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k = n^2 + n \underbrace{- \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k}_{=0},$$

was wir vereinfachen können zu

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k = n^2 + n.$$

Teilen wir schließlich beide Seiten der Gleichung durch 2, erhalten wir das Ergebnis:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Aufgabe 10: Werten Sie (durch Anwendung der Rechenregeln) folgende Summen aus!

(a) $\sum_{k=1}^{10} 2k$

(b) $\sum_{k=4}^{10} k$

(c) $\sum_{k=10}^{29} (3k - 2)$

Aufgabe 11: * Partialsummen geometrischer Reihen.
Seien c und $x \neq 1$ beliebige reelle Zahlen. Zeigen Sie durch Anwendung der Rechenregeln für Summen, dass folgender Zusammenhang für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} cx^k = \frac{c - cx^{n+1}}{1 - x}.$$

4 Doppelsummen

Manchmal sind Summanden von zwei (oder mehr) Laufvariablen abhängig.

$$\sum_{i=m}^{n} \sum_{j=l}^{r} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n} \left(\sum_{j=l}^{r} a_{ij} \right)$$

In der inneren Summe wird der Wert der äußeren Laufvariable i als konstant erachtet.

$$\sum_{i=m}^{n} \sum_{j=l}^{r} a_{ij} = \underbrace{(a_{ml} + \ldots + a_{mr})}_{i=m} + \underbrace{(a_{(m+1)l} + \ldots + a_{(m+1)r})}_{i=m+1} + \ldots + \underbrace{(a_{nl} + \ldots + a_{nr})}_{i=n}.$$

Beispiel 10:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4}(i+j) = \underbrace{(1+2)+(1+3)+(1+4)}_{i=1}+\underbrace{(2+3)+(2+4)}_{i=2}+\underbrace{(3+4)}_{i=3} = 30$$

Die äußere Summe hat 3 Summanden der Form $a_i = \sum_{j=i+1}^{4}(i+j)$. Jeder Summand ist selbst eine Summe mit Startwert $l = i+1$, Endwert $r = 4$ und Summanden der Form $a_{ij} = i+j$.

Beispiel 11:

$$\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{8}(i-j)$$

Hier ist $m = 1$ und $n = 7$. Die äußere Summe hat also 7 Summanden der Form $a_i = \sum_{j=1}^{8}(i-j)$. Jeder Summand ist also selbst wieder eine Summe mit Startwert $l = 1$, Endwert $r = 8$ und Summanden der Form $a_{ij} = i-j$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{8}(i-j) &= \sum_{i=1}^{7}\left(\sum_{j=1}^{8}(i-j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{7}\left(\sum_{j=1}^{8} i - \sum_{j=1}^{8} j\right) && \text{(Assoziativitätsgesetz)} \\
&= \sum_{i=1}^{7}\left(8i - \sum_{j=1}^{8} j\right) && \text{(Summen von Konstanten)} \\
&= \sum_{i=1}^{7}\left(8i - \frac{8\cdot 9}{2}\right) && \text{(Gaußsche Summenformel)} \\
&= \sum_{i=1}^{7}(8i-36) && \text{(Vereinfachen)} \\
&= \sum_{i=1}^{7} 8i - \sum_{i=1}^{7} 36 && \text{(Assoziativitätsgesetz)} \\
&= 8\cdot\sum_{i=1}^{7} i - 36\cdot\sum_{i=1}^{7} 1 && \text{(Distributivitätsgesetz)} \\
&= 8\cdot\frac{7\cdot 8}{2} - 36\cdot 7 && \text{(Summen von Konstanten)} \\
&= 8\cdot 7\cdot 4 - 36\cdot 7 && \text{(Vereinfachen)} \\
&= 7\cdot(8\cdot 4 - 36) && \text{(Ausklammern von 7)} \\
&= 7\cdot -4 && \text{(Vereinfachen)} \\
&= -28.
\end{aligned}$$

Aufgabe 12: Vereinfachen Sie folgende Summen!

(a) $\sum_{i=11}^{16} \sum_{j=1}^{5} ij$

(b) $\sum_{i=1}^{131} \sum_{j=2i}^{5} (i-j)^2$