Teil 2: Produkte

1 Einführung und Notation

Analog zu Summen betrachten wir nun eine Kurzschreibweise für Produkte über eine endliche Anzahl von Faktoren.

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Notation:

- Laufvariable k: durchläuft (einmal) alle ganzen Zahlen vom *Startwert* bis zum *Endwert*.
- Startwert $m \in \mathbb{Z}$: kleinster Wert für die Laufvariable k.
- Endwert $n \in \mathbb{Z}$: größter Wert für die Laufvariable k.
- Faktor a_k: Ausdruck in Abhängigkeit der Laufvariable k.

Beispiel 1:

$$\prod_{k=2}^{5} 2k^2 = \left(2 \cdot 2^2\right) \cdot \left(2 \cdot 3^2\right) \cdot \left(2 \cdot 4^2\right) \cdot \left(2 \cdot 5^2\right) = 230400$$

Hier ist $m = 2$, $n = 5$ und $a_k = 2k^2$.

Aufgabe 1: Schreiben Sie unter Verwendung von Summen- und Produktzeichen!

(a) $1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16$

(b) $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11$

(c) $4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 \cdot 64$

(d) $1 + (1 \cdot 2) + (1 \cdot 2 \cdot 3) + (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) + \ldots + (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)$

2 Rechenregeln

Für Produkte gelten weniger Rechenregeln als für Summen. Wir fassen die wichtigsten hier zusammen. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ sowie $a_k, b_k, c \in \mathbb{R}$.

2.1 Abspalten und Einziehen von Faktoren

Genau wie bei Summen können auch bei Produkten Faktoren eingezogen oder abgespalten werden. Es gilt:

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k=m}^{i} a_k \cdot \prod_{k=i+1}^{n} a_k.$$

Warum gilt die Regel?

$$\begin{aligned}
\prod_{k=m}^{n} a_k &= a_m \cdot \ldots \cdot a_i \cdot a_{i+1} \cdot \ldots \cdot a_n && \text{(Ausschreiben)} \\
&= (a_m \cdot \ldots \cdot a_i) \cdot (a_{i+1} + \ldots \cdot a_n) && \text{(Setzen von Klammern)} \\
&= \prod_{k=m}^{i} a_k \cdot \prod_{k=i+1}^{n} a_k. && \text{(Zusammenfassen)}
\end{aligned}$$

Auch das Abspalten des ersten oder letzten Faktors funktioniert analog:

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot \prod_{k=m+1}^{n} a_k \qquad \text{und} \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k=m}^{n-1} a_k \cdot a_n.$$

2.2 Assoziativgesetz

$$\prod_{k=m}^{n} a_k b_k = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right).$$

Warum gilt die Regel?

$$\begin{aligned}
\prod_{k=m}^{n} a_k b_k &= a_m \cdot b_m \cdot a_{m+1} \cdot b_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n \cdot b_n \\
&= (a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n) \cdot (b_m \cdot b_{m+1} \cdot \ldots \cdot b_n) \\
&= \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right).
\end{aligned}$$

Achtung: Im Allgemeinen ist jedoch

$$\prod_{k=m}^{n} (a_k + b_k) \neq \prod_{k=m}^{n} a_k + \prod_{k=m}^{n} b_k.$$

Aufgabe 2: Finden Sie ein Beispiel, für das

$$\prod_{k=m}^{n} (a_k + b_k) \neq \prod_{k=m}^{n} a_k + \prod_{k=m}^{n} b_k.$$

2.3 Produkte von Konstanten

Analog zu den Summen gilt:

$$\prod_{k=m}^{n} c = \underbrace{(c \cdot c \cdot \ldots \cdot c)}_{n-m+1 \text{ Faktoren}} = c^{n-m+1}.$$

2.4 Indexverschiebung

Auch bei Produkten kann eine Indexverschiebung vorgenommen werden. Für beliebige $r \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k=m-r}^{n-r} a_{k+r}.$$

3 Besonderheiten

3.1 Leeres Produkt

Für $m > n$ gilt:

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = 1.$$

3.2 Teleskop-Produkt

Faktoren haben die Form $a_k = \frac{b_{k+1}}{b_k}$.

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{b_{m+1}}{b_m} \cdot \frac{b_{m+2}}{b_{m+1}} \cdot \frac{b_{m+3}}{b_{m+2}} \cdot \ldots \cdot \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_{n+1}}{b_m}.$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{10} \left(\frac{k^2+2k}{k^2} + \frac{1}{k^2} \right) &= \prod_{k=2}^{10} \frac{k^2+2k+1}{k^2} && \text{(Zusammenfassen gleichnamiger Brüche)} \\
&= \prod_{k=2}^{10} \frac{(k+1)^2}{k^2} && \text{(Erste Binomische Formel)} \\
&= \frac{(10+1)^2}{2^2} = \frac{121}{4}.
\end{aligned}$$

Hier besitzen die Faktoren die Form $a_k = b_{k+1}/b_k$ mit $b_k = k^2$.

3.3 Fakultät

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Aufgabe 3: Werten Sie folgende Produkte aus!

(a) $$\prod_{i=2}^{4} \frac{i+1}{2}$$

(b) $$\prod_{i=10}^{80} (i^2 - 400)$$

(c) $$\prod_{i=1}^{13} \prod_{j=1}^{13} (i/j)$$

(d) $$\prod_{k=1}^{8} \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}$$

* (e) $$\prod_{k=2}^{13} \left(1 - \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}\right)$$

Hinweis: Manchmal können Sie sich durch geeignete Umformungen viel Arbeit ersparen.