



Teil 1: Summen

1 Einführung und Notation

Summen bestehen aus einer Folge von *Summanden*. Bei langen Summen mit vielen Summanden wird es unhandlich bis unmöglich, diese alle explizit aufzuschreiben. Solche Summen über endliche (oder unendliche) Zahlenfolgen sind aber ein elementares Konzept in vielen Bereichen der Informatik. Hier lernen wir deshalb eine Kurznotation kennen, mit der auch sehr lange oder sogar unendliche Summen kompakt ausgedrückt werden können.

Beispiel 1: Die folgende Summe in expliziter Form hat 5 Summanden (und den Wert 150).

$$10 + 20 + 30 + 40 + 50 = 150$$

- Im Beispiel hat der erste Summand den Wert 10, der zweite den Wert 20 und so weiter.
- Typischerweise lassen sich die Summanden in Abhängigkeit einer *Laufvariable* k beschreiben.
- Der Summand, der zur Laufvariable k gehört, wird mit a_k bezeichnet.
- Im Beispiel kann man als Laufvariable $k = 1, \dots, 5$ verwenden.
- Die Summanden haben dann die Form $a_k = 10k$.

In kompakter, impliziter Form wird eine Summe über folgende Notation beschrieben:

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n.$$

Bedeutung

- Laufvariable k : durchläuft alle ganzen Zahlen vom *Startwert* bis zum *Endwert* einmal.
- Startwert $m \in \mathbb{Z}$: kleinster Wert für die Laufvariable k .
- Endwert $n \in \mathbb{Z}$: größter Wert für die Laufvariable k .
- Summand a_k : Summanden in Abhängigkeit der Laufvariable k .

Die Summe aus Beispiel 1 in Summennotation:

$$\sum_{k=1}^5 10k = 10 + 20 + 30 + 40 + 50 = 150.$$

Hier ist der Startwert $m = 1$, der Endwert $n = 5$. Die Summanden haben die Form $a_k = 10k$.

Aufgabe 1: Wie viele Summanden hat eine Summe mit Startwert m und Endwert n ?

Bemerkung: Die Form der Summe ist nicht eindeutig. Wir können die Summe aus Beispiel 1 unter Verwendung anderer Start- und Endwerte beispielsweise auch schreiben als:

$$\sum_{k=2}^6 (10k - 10) = (20 - 10) + (30 - 10) + (40 - 10) + (50 - 10) + (60 - 10) = 150.$$

Hier ist $m = 2$ und $n = 6$. Die Summanden haben die Form $a_k = 10k - 10$.

Aufgabe 2: Schreiben Sie folgende Summen in expliziter Form und werten Sie diese aus!

(a) $\sum_{k=1}^5 k^2$

(b) $\sum_{k=-1}^3 (2k - 1)$

(c) $\sum_{i=0}^3 (-1)^i$

(d) $\sum_{i=12}^{15} |i - 14|$

Aufgabe 3: Schreiben Sie unter Verwendung von Summenzeichen!

(a) $3 + 6 + 9 + 12 + 15$

(b) $-3 - 6 - 9 - 12 - 15$

(c) $2 + 2 + 2 + 2 + 2$

(d) $5 + 12 + 19 + 26 + 33 + 40 + 47 + 54 + 61$

(e) Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen

! (f) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8$

2 Rechenregeln

Summen können durch Anwendung von Rechenregeln ohne großen Rechenaufwand ausgewertet werden. Im Folgenden bezeichnen $m, n \in \mathbb{N}$ natürliche Start- und Endwerte sowie $a_k, b_k, c \in \mathbb{R}$ reellwertige Summanden in Abhängigkeit von einer Laufvariable $k \in \mathbb{Z}$.

2.1 Abspalten und Einziehen von Summanden

Wir können eine Summe in zwei (oder mehr) Summen aufspalten. Dazu wählen wir eine beliebige ganze Zahl i als neuen Endwert (und $i + 1$ als neuen Startwert). Es gilt:

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^i a_k + \sum_{k=i+1}^n a_k.$$

Beispiel 2: Hier ist $m = 1$, $n = 9$, $a_k = k^2$ und $i = 4$.

$$\sum_{k=1}^9 k^2 = \sum_{k=1}^4 k^2 + \sum_{k=5}^9 k^2.$$

Warum gilt die Regel?

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n a_k &= a_m + \dots + a_i + a_{i+1} + \dots + a_n && \text{(Ausschreiben)} \\ &= (a_m + \dots + a_i) + (a_{i+1} + \dots + a_n) && \text{(Setzen von Klammern)} \\ &= \sum_{k=m}^i a_k + \sum_{k=i+1}^n a_k. && \text{(Zusammenfassen)} \end{aligned}$$

Von besonderer Bedeutung ist das Abspalten des ersten (oder letzten) Summanden:

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + \sum_{k=m+1}^n a_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^{n-1} a_k + a_n.$$

Hinweis: Selbstverständlich gilt die Regel in beide Richtungen. Das heißt:

$$\sum_{k=m}^i a_k + \sum_{k=i+1}^n a_k = \sum_{k=m}^n a_k.$$

Aufgabe 4: Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke!

- (a) $\left(\sum_{k=1}^5 k\right) + \left(\sum_{k=6}^{10} k\right)$
- (b) $\left(\sum_{k=1}^5 k^2\right) + \left(\sum_{k=5}^{10} k^2\right)$
- (c) $\left(\sum_{k=1}^{10} k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^4 k^2\right)$

2.2 Assoziativgesetz

Für beliebige Summanden der Form $a_k + b_k$ gilt:

$$\sum_{k=m}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k.$$

Beispiel 3: Hier: $a_k = k$ und $b_k = 2$.

$$\sum_{k=1}^{10} (k + 2) = \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 2.$$

Warum gilt Assoziativität?

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n (a_k + b_k) &= (a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \dots + (a_n + b_n) && \text{(Ausschreiben der Summe)} \\ &= a_m + b_m + a_{m+1} + b_{m+1} + \dots + a_n + b_n && \text{(Weglassen von Klammern)} \\ &= a_m + a_{m+1} + \dots + a_n + b_m + b_{m+1} + \dots + b_n && \text{(Umordnen der Summanden)} \\ &= (a_m + a_{m+1} + \dots + a_n) + (b_m + b_{m+1} + \dots + b_n) && \text{(Neue Klammern)} \\ &= \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k. \end{aligned}$$

Achtung: Im Allgemeinen ist jedoch:

$$\sum_{k=m}^n a_k \cdot b_k \neq \left(\sum_{k=m}^n a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=m}^n b_k \right).$$

Aufgabe 5: Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke!

- (a) $\sum_{k=1}^5 10k + \sum_{k=1}^5 2$
- (b) $\left(\sum_{k=1}^5 (2 - k) \right) + \left(\sum_{k=1}^5 k \right) - \left(\sum_{k=1}^5 2 \right)$
- (c) $\sum_{k=0}^{11} (4k^2 + 1) - \sum_{k=0}^{11} (3k^2 - 2k)$

Aufgabe 6: Sind folgende Umformungen korrekt?

- (a) $\sum_{k=1}^{10} 3k = \left(\sum_{k=2}^9 3k \right) + 33$
- (b) $\sum_{k=1}^{10} 3k = \left(\sum_{k=1}^{10} 3 \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{10} k \right)$
- (c) $\sum_{k=1}^{10} (3k + 4) = \left(\sum_{k=1}^{10} 3k \right) + \left(\sum_{k=1}^{10} 4 \right)$

2.3 Distributivgesetz

Sei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante. *Achtung:* Die Konstante c darf nicht von k abhängen!

$$\sum_{k=m}^n c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=m}^n a_k.$$

Beispiel 4: Hier ist $a_k = k$ und $c = 2$. Da der Faktor 2 nicht von k abhängt, können wir diesen aus der Summe ausklammern.

$$\sum_{k=1}^{10} 2k = 2 \cdot \sum_{k=1}^{10} k.$$

Warum gilt das Gesetz?

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n c \cdot a_k &= c \cdot a_m + c \cdot a_{m+1} + \dots + c \cdot a_n && \text{(Ausschreiben)} \\ &= c \cdot (a_m + a_{m+1} + \dots + a_n) && \text{(Ausklammern von } c) \\ &= c \cdot \sum_{k=m}^n a_k && \text{(Zusammenfassen).} \end{aligned}$$

2.4 Summen von Konstanten

Ein wichtiger Spezialfall sind Summen von Konstanten:

$$\sum_{k=m}^n c = c \cdot (n - m + 1)$$

Warum gilt das Gesetz?

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n c &= c \cdot \sum_{k=m}^n 1 && \text{(Distributivgesetz)} \\ &= c \cdot \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{n-m+1 \text{ Summanden}} && \text{(Ausschreiben)} \\ &= c \cdot (n - m + 1) && \text{(Vereinfachen)} \end{aligned}$$

Beispiel 5:

$$\sum_{k=0}^n 2 = 2 \cdot (n + 1) = 2n + 2.$$

Aufgabe 7: Werten Sie folgende Summen aus!

(a) $\frac{1}{c} \cdot \sum_{k=1}^{50} 2c$

(b) $\sum_{i=1}^{50} (4i + 3i^2 - 20) + \sum_{i=1}^{50} (3i - 4i^2 + 10) - \sum_{i=1}^{50} (30 + 7i - i^2)$

(c) $\sum_{l=4}^{10} (l^3 - 3l^2 + 20) - \sum_{l=3}^{10} (-3l^2 + l^3 + 18)$

2.5 Indexverschiebung

Für beliebige $r \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m-r}^{n-r} a_{k+r}$$

Wir können die Summanden der Form a_k durch a_{k+r} ersetzen, indem wir alle Vorkommen der Laufvariable k durch $(k + r)$ ersetzen.

Beispiel 6: Es sei $a_k = 4k - 2$. Für $r = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 4(k+1) - 2 \\ &= 4k + 4 - 2 \\ &= 4k + 2. \end{aligned}$$

Aufgabe 8: Es sei $a_k = 4k - 2$. Bestimmen Sie a_{k+r} für die Werte $r = -2, -1, 0$ und 2 .

Beispiel 7: Hier ist $a_k = 10k$, das heißt $a_{k+r} = 10 \cdot (k + r) = 10k + 10r$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=21}^{25} 10k &= \sum_{k=1}^5 (10k + 200) && \text{(Indexverschiebung: } r = 20\text{)} \\ &= \sum_{k=1}^5 10k + \sum_{k=1}^5 200 && \text{(Assoziativität)} \\ &= \sum_{k=1}^5 10k + 200 \cdot 5 && \text{(Summen von Konstanten)} \\ &= 10 \sum_{k=1}^5 k + 200 \cdot 5 && \text{(Distributivität)} \\ &= 10 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) + 200 \cdot 5 && \text{(Explizite Form)} \\ &= 10 \cdot 15 + 200 \cdot 5 && \text{(Vereinfachen)} \\ &= 150 + 1000 && \text{(Vereinfachen)} \\ &= 1150 && \text{(Vereinfachen)} \end{aligned}$$

Warum gilt die Regel?

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=m}^n a_k &= a_m + a_{m+1} + \dots + a_n && \text{(Ausschreiben)} \\
 &= a_{m+(r-r)} + a_{m+1+(r-r)} + \dots + a_{n+(r-r)} && (r-r=0) \\
 &= a_{(m-r)+r} + a_{(m-r+1)+r} + \dots + a_{(n-r)+r} && \text{(Summanden umordnen)} \\
 &= \sum_{k=m-r}^{n-r} a_{k+r} && \text{(Zusammenfassen)}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 9: Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke!

- (a) $\sum_{k=11}^{15} (k-10)$
- (b) $\sum_{k=9}^{17} (k-6)^2 - \sum_{k=1}^7 (k+2)^2$
- (c) $\sum_{k=1}^{10} (k+2)^4 - \sum_{k=1}^{12} k^4$
- (d) $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k} + \sum_{k=12}^{30} \frac{1}{10-k}$
- (e) $\sum_{k=7}^{89} k \cdot (k-2)^3 - \sum_{k=5}^{87} (k^4 + 2k^3)$

3 Besonderheiten

Folgende Besonderheiten im Umgang mit Summen sollte man kennen.

3.1 Leere Summe

Für $m > n$ definiert man:

$$\sum_{k=m}^n a_k = 0$$

Beispiel 8:

$$\sum_{k=10}^5 2k = 0$$

3.2 Teleskop-Summe

In einer Teleskop-Summe haben die Summanden die Form $a_k = b_k - b_{k+1}$. Die Summanden sind daher Differenzen zweier Ausdrücke b_k und b_{k+1} , die beide von k abhängen. Dann gilt:

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^n (b_k - b_{k+1}) = b_m - b_{n+1}.$$

Beispiel 9: Im folgenden Beispiel ist $a_k = k^2 - (k+1)^2$, d. h. $b_k = k^2$.

$$\sum_{k=3}^9 (k^2 - (k+1)^2) = 3^2 - (9+1)^2 = 9 - 100 = -91.$$

Aufgabe 10: Leiten Sie die Regel

$$\sum_{k=m}^n (b_k - b_{k+1}) = b_m - b_{n+1}$$

zur Auswertung von Teleskop-Summen aus den anderen Rechenregeln her!

3.3 Gaußsche Summenformel

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen taucht in vielen Anwendungen auf. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

Beispiel 10:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 10k &= 10 \sum_{k=1}^5 k && \text{(Distributivität)} \\ &= 10 \cdot \frac{5^2 + 5}{2} && \text{(Gaußsche Summenformel)} \\ &= 10 \cdot 15 && \text{(Vereinfachen)} \\ &= 150. \end{aligned}$$

Für Fortgeschrittene: Warum gilt die Regel? Wir starten mit

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= 1 + 2 + \dots + n \\ &= n + (n-1) + \dots + 1 && \text{(Umkehren der Summationsreihenfolge)} \\ &= \sum_{k=1}^n (n+1-k) && \text{(Überführen in Summenform)} \\ &= \sum_{k=1}^n n + \sum_{k=1}^n 1 - \sum_{k=1}^n k && \text{(Assoziativitätsgesetz)} \\ &= n^2 + n - \sum_{k=1}^n k. && \text{(Summen von Konstanten)} \end{aligned}$$

Zusammenfassend haben wir bisher folgenden Zusammenhang nachgewiesen:

$$\sum_{k=1}^n k = n^2 + n - \sum_{k=1}^n k.$$

Addieren wir den Term $\sum_{k=1}^n k$ auf beiden Seiten der Gleichung, erhalten wir

$$\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k = n^2 + n - \underbrace{\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k}_{=0},$$

was wir vereinfachen können zu

$$2 \cdot \sum_{k=1}^n k = n^2 + n.$$

Teilen wir schließlich beide Seiten der Gleichung durch 2, erhalten wir das Ergebnis:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Aufgabe 11: Werten Sie (durch Anwendung der Rechenregeln) folgende Summen aus!

(a) $\sum_{k=1}^{10} 2k$

(b) $\sum_{k=4}^{10} k$

(c) $\sum_{k=10}^{29} (3k - 2)$

Aufgabe 12: * Partialsummen geometrischer Reihen.

Seien c und $x \neq 1$ beliebige reelle Zahlen. Zeigen Sie durch Anwendung der Rechenregeln für Summen, dass folgender Zusammenhang für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\sum_{k=0}^n cx^k = \frac{c - cx^{n+1}}{1 - x}.$$

4 Doppelsummen

Manchmal sind Summanden von zwei (oder mehr) Laufvariablen abhängig, z.B. $a_{ij} = i + j$.

$$\sum_{i=m}^n \sum_{j=l}^r a_{ij} = \sum_{i=m}^n \left(\sum_{j=l}^r a_{ij} \right)$$

In der inneren Summe wird der Wert der äußeren Laufvariable i als konstant erachtet.

$$\sum_{i=m}^n \sum_{j=l}^r a_{ij} = \underbrace{(a_{ml} + \dots + a_{mr})}_{i=m} + \underbrace{(a_{(m+1)l} + \dots + a_{(m+1)r})}_{i=m+1} + \dots + \underbrace{(a_{nl} + \dots + a_{nr})}_{i=n}.$$

Beispiel 11: Hier ist $a_{ij} = i + j$.

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^4 (i+j) = \underbrace{(1+2) + (1+3) + (1+4)}_{i=1} + \underbrace{(2+3) + (2+4)}_{i=2} + \underbrace{(3+4)}_{i=3} = 30$$

Die äußere Summe hat 3 Summanden der Form $a_i = \sum_{j=i+1}^4 (i+j)$. Jeder Summand ist selbst eine Summe mit Startwert $l = i + 1$, Endwert $r = 4$ und Summanden der Form $a_{ij} = i + j$.

Rechenregeln

Für Doppelsummen gelten im Wesentlichen dieselben Rechenregeln wie für gewöhnliche Summen. Zusätzlich kann man häufig die Reihenfolge der Summation vertauschen.

4.1 Distributivgesetz

Konstanten kann man aus der Doppelsumme herausziehen.

$$\sum_{i=m}^n \sum_{j=l}^r c a_{ij} = c \sum_{i=m}^n \sum_{j=l}^r a_{ij}.$$

4.2 Assoziativgesetz

Summen und Differenzen kann man aufteilen:

$$\sum_{i=m}^n \sum_{j=l}^r (a_{ij} + b_{ij}) = \sum_{i=m}^n \sum_{j=l}^r a_{ij} + \sum_{i=m}^n \sum_{j=l}^r b_{ij}$$

4.3 Änderung der Summationsreihenfolge

Bei endlichen Summen darf man die Reihenfolge der Summen ändern:

$$\sum_{i=m}^n \sum_{j=l}^r a_{ij} = \sum_{j=l}^r \sum_{i=m}^n a_{ij}$$

Warum gilt die Regel?

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=m}^n \sum_{j=l}^r a_{ij} &= \underbrace{(a_{ml} + \dots + a_{mr})}_{i=m} + \underbrace{(a_{(m+1)l} + \dots + a_{(m+1)r})}_{i=m+1} + \dots + \underbrace{(a_{nl} + \dots + a_{nr})}_{i=n} \\
 &= \underbrace{(a_{ml} + a_{(m+1)l} + \dots + a_{nl})}_{j=l} + \dots + \underbrace{(a_{mr} + a_{(m+1)r} + \dots + a_{nr})}_{j=r} \\
 &= \sum_{j=l}^r \sum_{i=m}^n a_{ij}.
 \end{aligned}$$

Anmerkung: Bei unendlichen Doppelsummen ist das Vertauschen nicht automatisch erlaubt. (Absolute Konvergenz ist eine wichtige hinreichende Bedingung.)

4.4 Vertauschen von Summen mit abhängigen Laufvariablen

Häufig wird die innere Laufvariable durch die äußere beschränkt, z.B.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{ij}$$

In solchen Fällen kann man die Reihenfolge der Summen auch vertauschen, muss aber die Grenzen neu bestimmen. Die ursprünglichen Indexpaare erfüllen

$$1 \leq j \leq i \leq n.$$

Daher gilt:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_{ij}$$

Das ist die wohl wichtigste Rechenregel bei Doppelsummen.

Aufgabe 13: Vertauschen Sie beide Summen. Bestimmen Sie die passenden Grenzen.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n a_{ij} = \sum_{j=?}^? \sum_{i=?}^? a_{ij}$$

4.5 Zerlegen von Produkten

Lässt sich der Summand als Produkt eines reinen i- und eines reinen j-Terms schreiben

$$a_{ij} = x_i y_j,$$

dann gilt

$$\sum_{i=m}^n \sum_{j=l}^r x_i y_j = \left(\sum_{i=m}^n x_i \right) \left(\sum_{j=l}^r y_j \right).$$

Beispiel 12:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 ij = \left(\sum_{i=1}^3 i \right) \left(\sum_{j=1}^4 j \right) = \frac{3 \cdot (3+1)}{2} \cdot \frac{4 \cdot (4+1)}{2} = 6 \cdot 10 = 60.$$

Aufgabe 14: Leiten Sie die Rechenregel aus den Rechenregeln für einfache Summen ab.

4.6 Summand hängt nur von einem Index ab

Hängt der Summand nur von i , aber nicht von j ab (oder umgekehrt), gilt:

$$\sum_{i=m}^n \sum_{j=l}^r a_i = (r - l + 1) \sum_{i=m}^n a_i$$

$$\sum_{i=m}^n \sum_{j=l}^r b_j = (n - m + 1) \sum_{j=l}^r b_j$$

Aufgabe 15: Leiten Sie aus den bekannten Rechenregel ab:

$$\sum_{i=m}^n \sum_{j=l}^r (i + j) = (r - l + 1) \sum_{i=m}^n i + (n - m + 1) \sum_{j=l}^r j.$$

Aufgabe 16: Werten Sie folgende Doppelsumme unter Ausnutzung der passenden Rechenregeln aus:

$$\sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^8 (i - j)$$

Aufgabe 17: Vereinfachen Sie folgende Summen!

(a) $\sum_{i=1}^{16} \sum_{j=1}^5 ij$

(b) $\sum_{i=1}^{131} \sum_{j=2i}^5 (i - j)^2$