



Teil 2: Produkte

1 Einführung und Notation

Analog zu Summen betrachten wir nun eine Kurzschreibweise für Produkte über eine endliche Anzahl von Faktoren.

$$\prod_{k=m}^n a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n$$

Notation:

- Laufvariable k : durchläuft (einmal) alle ganzen Zahlen vom *Startwert* bis zum *Endwert*.
- Startwert $m \in \mathbb{Z}$: kleinster Wert für die Laufvariable k .
- Endwert $n \in \mathbb{Z}$: größter Wert für die Laufvariable k .
- Faktor a_k : Ausdruck in Abhängigkeit der Laufvariable k .

Beispiel 1:

$$\prod_{k=2}^5 2k^2 = (2 \cdot 2^2) \cdot (2 \cdot 3^2) \cdot (2 \cdot 4^2) \cdot (2 \cdot 5^2) = 230400$$

Hier ist $m = 2$, $n = 5$ und $a_k = 2k^2$.

Aufgabe 1: Schreiben Sie unter Verwendung von Summen- und Produktzeichen!

- (a) $1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16$
- (b) $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11$
- (c) $4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 \cdot 64$
- (d) $1 + (1 \cdot 2) + (1 \cdot 2 \cdot 3) + (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) + \dots + (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n)$

2 Besondere Produkte

Diese Produkte sollte man kennen:

2.1 Leeres Produkt

Für $m > n$ gilt:

$$\prod_{k=m}^n a_k = 1$$

2.2 Fakultät

Allgegenwärtig in Kombinatorik und Algorithmik ist die Fakultät einer natürlichen Zahl n :

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Aufgabe 2: Vereinfachen Sie die Produkte:

(a) $\prod_{k=1}^n (k+1)$

(b) $\prod_{k=1}^n (k+2)$

3 Rechenregeln

Es folgt eine Zusammenfassung der wichtigsten Rechenregeln für Produkte. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ sowie $a_k, b_k, c \in \mathbb{R}$.

3.1 Abspalten und Einziehen von Faktoren

Genau wie bei Summen können auch bei Produkten Faktoren eingezogen oder abgespalten werden. Es gilt:

$$\prod_{k=m}^n a_k = \left(\prod_{k=m}^i a_k \right) \cdot \left(\prod_{k=i+1}^n a_k \right)$$

Warum gilt die Regel?

$$\begin{aligned} \prod_{k=m}^n a_k &= a_m \cdot \dots \cdot a_i \cdot a_{i+1} \cdot \dots \cdot a_n && \text{(Ausschreiben)} \\ &= (a_m \cdot \dots \cdot a_i) \cdot (a_{i+1} \cdot \dots \cdot a_n) && \text{(Setzen von Klammern)} \\ &= \left(\prod_{k=m}^i a_k \right) \cdot \left(\prod_{k=i+1}^n a_k \right) && \text{(Zusammenfassen)} \end{aligned}$$

Auch das Abspalten des ersten oder letzten Faktors funktioniert analog:

$$\prod_{k=m}^n a_k = a_m \cdot \left(\prod_{k=m+1}^n a_k \right) \quad \text{und} \quad \prod_{k=m}^n a_k = \left(\prod_{k=m}^{n-1} a_k \right) \cdot a_n.$$

3.2 Assoziativgesetz

Sind die Faktoren selbst wieder Produkte, kann man diese zerlegen:

$$\prod_{k=m}^n (a_k b_k) = \left(\prod_{k=m}^n a_k \right) \cdot \left(\prod_{k=m}^n b_k \right)$$

Warum gilt die Regel?

$$\begin{aligned} \prod_{k=m}^n (a_k b_k) &= (a_m \cdot b_m) \cdot (a_{m+1} \cdot b_{m+1}) \cdot \dots \cdot (a_n \cdot b_n) \\ &= (a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n) \cdot (b_m \cdot b_{m+1} \cdot \dots \cdot b_n) \\ &= \left(\prod_{k=m}^n a_k \right) \cdot \left(\prod_{k=m}^n b_k \right). \end{aligned}$$

Achtung: Im Allgemeinen ist jedoch

$$\prod_{k=m}^n (a_k + b_k) \neq \prod_{k=m}^n a_k + \prod_{k=m}^n b_k.$$

Aufgabe 3: Finden Sie ein Beispiel, für das

$$\prod_{k=m}^n (a_k + b_k) \neq \prod_{k=m}^n a_k + \prod_{k=m}^n b_k.$$

3.3 Produkte von Quotienten

Fall $b_i \neq 0$:

$$\prod_{k=m}^n (a_i / b_i) = \left(\prod_{k=m}^n a_i \right) / \left(\prod_{k=m}^n b_i \right)$$

3.4 Produkte von Konstanten

Analog zu den Summen gilt:

$$\prod_{k=m}^n c = \underbrace{(c \cdot c \cdot \dots \cdot c)}_{n-m+1 \text{ Faktoren}} = c^{n-m+1}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^4 (3i) &= \left(\prod_{k=1}^4 3 \right) \left(\prod_{k=1}^4 i \right) && \text{(Assoziativgesetz)} \\ &= 3^4 \prod_{k=1}^4 i && \text{(Produkte von Konstanten)}\end{aligned}$$

3.5 Produkte von Potenzen

Haben alle Faktoren einen gemeinsamen Exponenten $x \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$\prod_{k=m}^n a_i^x = \left(\prod_{k=m}^n a_i \right)^x$$

Beispiel 3:

$$\prod_{k=1}^n k^2 = \left(\prod_{k=1}^n k \right)^2 = (n!)^2$$

3.6 Indexverschiebung

Wie schon bei den Summen kann bei Produkten eine Indexverschiebung vorgenommen werden. Für beliebige $r \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\prod_{k=m}^n a_k = \prod_{k=m-r}^{n-r} a_{k+r}$$

Beispiel 4:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^n (k+1)^2 &= \prod_{k=2}^{n+1} k^2 && \text{(Indexverschiebung } r = -1) \\ &= \left(\prod_{k=2}^{n+1} k \right)^2 && \text{(Produkte von Potenzen)} \\ &= ((n+1)!)^2 && \left(\prod_{k=2}^{n+1} k = (n+1)! \right)\end{aligned}$$

3.7 Teleskop-Produkt

Haben die Faktoren die Form $a_k = \frac{b_{k+1}}{b_k}$, liegt ein Teleskop-Produkt vor.

$$\prod_{k=m}^n \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{b_{n+1}}{b_m}$$

Warum?

$$\prod_{k=m}^n \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{b_{m+1}}{b_m} \cdot \frac{b_{m+2}}{b_{m+1}} \cdot \frac{b_{m+3}}{b_{m+2}} \cdot \dots \cdot \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_{n+1}}{b_m}.$$

Beispiel 5:

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{10} \left(\frac{k^2 + 2k}{k^2} + \frac{1}{k^2} \right) &= \prod_{k=2}^{10} \frac{k^2 + 2k + 1}{k^2} && \text{(Zusammenfassen gleichnamiger Brüche)} \\ &= \prod_{k=2}^{10} \frac{(k+1)^2}{k^2} && \text{(Erste Binomische Formel)} \\ &= \frac{(10+1)^2}{2^2} = \frac{121}{4}. \end{aligned}$$

Hier besitzen die Faktoren die Form $a_k = b_{k+1}/b_k$ mit $b_k = k^2$.

Aufgabe 4: Werten Sie folgende Produkte aus!

- (a) $\prod_{i=2}^4 \frac{i+1}{2}$
- (b) $\prod_{i=10}^{80} (i^2 - 400)$
- (c) $\prod_{i=1}^{13} \prod_{j=1}^{13} (i/j)$
- (d) $\prod_{k=1}^8 \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}$
- * (e) $\prod_{k=2}^{13} \left(1 - \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2} \right)$