



Teil 5: Aussagenlogik

Bevor wir uns in den nächsten Tagen mit Beweistechniken beschäftigen, legen wir zunächst die Grundlagen der *Aussagenlogik*, ohne die Beweise nicht verstanden werden können.

1 Aussagen

Definition 1 (Aussage). *Eine Aussage ist ein aus Wörtern oder mathematischen Zeichen aufgebauter Ausdruck, von dem es möglich und sinnvoll ist zu fragen, ob er wahr (W) oder falsch (F) ist.*

Ein Ausdruck ist also eine Aussage, wenn wir sinnvoll fragen können: Ist es wahr, dass ... ?

Beispiel 1: Folgende Ausdrücke sind Aussagen:

- 6 ist eine gerade Zahl. (Wahre Aussage)
- Alle ganzen Zahlen sind durch 3 teilbar. (Falsche Aussage)
- München liegt in Sachsen-Anhalt. (Falsche Aussage)
- Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen liegt mindestens eine Primzahl. (Wahrheitswert unbekannt, Legendresche Vermutung)

Keine Aussagen im mathematischen Sinne sind zum Beispiel die Ausdrücke:

Beispiel 2:

- Ist 5 eine Primzahl?
- Für alle $x > 0$.
- $5 + 4$
- $x > 2$

Anmerkungen:

- Es ist nicht erforderlich, sagen zu können, ob der Ausdruck wahr oder falsch ist. Es genügt, dass die Frage nach Wahrheit oder Falschheit sinnvoll ist.
- Ausdrücke mit freien Variablen wie $x > 2$ sind *keine* Aussagen (weil es vom Wert von x abhängt, ob der Ausdruck wahr oder falsch ist) sondern Aussageformen (dazu kommen wir später).
- Der Wahrheitswert einer Aussage ist entweder wahr oder falsch, niemals beides.
- Es gibt außer wahr und falsch keinen dritten Wahrheitswert.

Aufgabe 1: Handelt es sich bei den folgenden Sätzen um Aussagen?

- (a) $3/2 \in \mathbb{Z}$
- (b) $\sqrt{2}$
- (c) $a^2 + b^2 = c^2$
- (d) $x + y = z$ mit $x, y, z \in \mathbb{N}$
- (e) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt $a^2 + b^2 = c^2$.
- (f) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $n^2 = n$.

Aufgabe 2: Formulieren Sie zwei wahre Aussagen über Zahlen.

Aufgabe 3: Formulieren Sie zwei falsche Aussagen über Zahlen.

2 Negation (Verneinung)

Aussagen können negiert (= verneint) werden. Die *Negation* einer Aussage A wird mit $\bar{A}$ bezeichnet und hat den entgegengesetzten Wahrheitswert von A .

Definition: Die Negation $\bar{A}$ einer Aussage A ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Die folgende *Wahrheitstabelle* veranschaulicht die Definition in kompakter Form.

A	$\bar{A}$
W	F
F	W

Beispiel 3:

- A : 6 ist eine gerade Zahl. (W)

$\Rightarrow \bar{A}$: 6 ist keine gerade Zahl. (F)

Beispiel 4:

- A : Alle geraden Zahlen sind durch 3 teilbar. (F)

$\Rightarrow \bar{A}$: Es gibt (mindestens) eine gerade Zahl, die nicht durch 3 teilbar ist. (W)

Aufgabe 4: Negieren Sie folgende Aussagen und bestimmen Sie deren Wahrheitswert:

- (a) 5 ist eine gerade Zahl.
- (b) $4 = 3 + 4$
- (c) Es gibt keine blauen Autos.
- (d) Alle Autos sind rot.

Aufgabe 5: Erweitern Sie die Wahrheitstabelle um die Spalte $\overline{\overline{A}}$.

Anmerkungen:

- Negation $\neq$ Gegenteil. In der natürlichen Sprache bezeichnet *Gegenteil* das andere Ende eines Spektrums. Zum Beispiel sind „Alle Autos sind rot“ und „Kein Auto ist rot“ Gegenteile, jedoch nicht Negationen von einander.

3 Konjunktion (Und-Verknüpfung)

Zwei Aussagen A und B können durch „und“ zu einer zusammengesetzten Aussage $A \wedge B$ verknüpft werden. Die zusammengesetzte Aussage ist nur dann wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind.

Definition 2 (Konjunktion). Die Konjunktion $A \wedge B$ zweier Aussagen A und B ist genau dann wahr, wenn sowohl A und B wahr sind.

A	B	$A \wedge B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Beispiel 5:

- $\underbrace{\text{München liegt in Bayern}}_{A (W)} \text{ und } \underbrace{[\text{München liegt}] \text{ nicht in Sachsen-Anhalt}}_{B (W)} . \quad (W)$
- $\underbrace{5 \text{ ist eine ganze Zahl}}_{A (W)} \text{ und } \underbrace{[5] \text{ ist gerade}}_{B (F)} . \quad (F)$
- $\underbrace{4 + 4 = 9}_{A (F)} \wedge \underbrace{4 \in \mathbb{Z}}_{B (W)} \quad (F).$

Aufgabe 6: Fügen Sie der Wahrheitstabelle folgende Spalten hinzu.

- $A \wedge \overline{B}$,
- $A \wedge \overline{A}$,
- $B \wedge A$,
- $\overline{A} \wedge \overline{B}$
- $\overline{A \wedge B}$.

Aufgabe 7: Geben Sie jeder der folgenden Aussagen einen sprachlichen Inhalt.

(a) $A \wedge \overline{B}$

(b) $\overline{A \wedge B}$

(c) $A \wedge \overline{A}$

4 Disjunktion (Oder-Verknüpfung)

Zwei Aussagen A und B können durch „oder“ zu einer zusammengesetzten Aussage $A \vee B$ verknüpft werden. Die zusammengesetzte Aussage ist wahr, sofern mindestens eine der Aussagen A und B wahr ist.

Definition 3 (Disjunktion). Die Disjunktion $A \vee B$ zweier Aussagen A und B ist genau dann falsch, wenn A und B falsch sind.

A	B	$A \vee B$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Bemerkung: Das logische „Oder“ darf nicht mit dem umgangssprachlichen „entweder oder“ verwechselt werden, bei dem nicht beide Aussagen gleichzeitig gelten dürfen und oft eine Entscheidung erwartet wird.

Beispiel 6:

- $\underbrace{\text{München liegt in Bayern}}_W \text{ oder } \underbrace{[\text{München liegt}] \text{ in Sachsen}}_F. \quad (W)$
- $\underbrace{4 \text{ ist ungerade}}_F \text{ oder } \underbrace{[4] \text{ ist nicht ganzzahlig}}_F. \quad (F)$

Aufgabe 8: Fügen Sie der Wahrheitstabelle folgende Spalten hinzu.

(a) $\overline{A \vee B},$

(b) $\overline{A} \wedge \overline{B},$

(c) $\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}},$

(d) $\overline{A} \wedge (A \vee B).$

5 Bijunktion (Genau-Dann-Wenn-Verknüpfung)

Die *Bijunktion* ist (wie die Negation, Konjunktion und Disjunktion) ein Operator, der zwei Aussagen A und B zu einer zusammengesetzten Aussage $A \leftrightarrow B$ verknüpft.

Definition 4 (Bijunktion). Die Bijunktion $A \leftrightarrow B$ (gelesen: A genau dann, wenn B) zweier Aussagen A und B ist genau dann wahr, wenn A und B denselben Wahrheitswert haben.

A	B	$A \leftrightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Aufgabe 9: Bestimmen Sie die Wahrheitswerttabellen für folgende Bijunktionen:

(a) $A \leftrightarrow (A \vee (A \wedge \bar{A}))$

(b) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow B$

(c) $(\bar{A} \vee \bar{B}) \leftrightarrow \overline{A \wedge B}$

(d) $B \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee B)$

6 Subjunktion (Wenn-Dann-Verknüpfung)

Mit der Subjunktion werden zwei Aussagen A und B zu einer neuen Aussage (einer sogenannten Wenn-Dann-Aussage) $A \rightarrow B$ zusammengesetzt. Die Aussage A wird dabei als *Prämisse*, B als *Konklusion* bezeichnet.

Definition 5 (Subjunktion). Die Subjunktion $A \rightarrow B$ (gelesen: wenn A, dann B) zweier Aussagen A und B ist genau dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist.

Wir erhalten folgende Wahrheitswerttabelle:

A	B	$A \rightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Schauen wir uns zunächst ein motivierendes Beispiel an:

Beispiel 7: Wir betrachten folgende Subjunktion der Form $A \rightarrow B$:

$$\underbrace{\text{Wenn es regnet}}_A, \text{ dann ist die Straße nass.} \quad \underbrace{B}$$

Ist diese Wenn-Dann-Aussage wahr oder falsch? Das hängt von den Wahrheitswerten der Teilaussagen A und B ab. Wir diskutieren alle möglichen Fälle separat:

- Regnet es tatsächlich (A ist wahr) und ist die Straße tatsächlich nass (B ist wahr), so spricht dies für die in der Wenn-Dann-Aussage behaupteten Kausalität.

Fazit: Sind A und B wahr, so ist $A \rightarrow B$ ebenfalls wahr.

- Regnet es tatsächlich (A ist wahr), aber die Straße ist dennoch *nicht* nass (B ist falsch), so gilt die in der Wenn-Dann-Aussage behauptete Kausalität offenbar nicht.

Fazit: Ist A wahr und B falsch, so ist $A \rightarrow B$ falsch.

- Was aber ist, wenn es gar nicht regnet (A ist falsch)? Die Subjunktion trifft darüber keine Aussage. Die Straße kann aus einem anderen Grund nass sein (beispielsweise durch einen offenen Hydranten), oder sie ist trocken. Wir vereinbaren, dass die Subjunktion in diesem Fall wahr ist.

Fazit: Ist also A falsch, so ist $A \rightarrow B$ wahr (unabhängig von B).

Beispiel 8: Wenn 4 eine ganze Zahl ist, dann ist 5 eine ganze Zahl. (W)

A (W)

B (W)

- Die Subjunktion ist wahr, da Prämisse und Konklusion wahr sind.

Beispiel 9: Wenn 4 eine ganze Zahl ist, dann ist die Erde flach. (F)

A (W)

B (F)

- Die Subjunktion ist falsch, da die Prämisse wahr und die Konklusion falsch ist.

Beispiel 10: Wenn die Erde flach ist, dann leben Reptilien auf dem Mars. (W)

A (F)

B (F)

- Die Subjunktion ist wahr, da die Prämisse falsch ist.

Anmerkungen:

- Weil Subjunktionen bei falscher Prämisse wahr sind, heißt das mit anderen Worten:

Aus einer falschen Prämisse folgt Beliebiges (= W oder F).

- Warum haben wir vereinbart, dass Subjunktionen bei falscher Prämisse wahr sind? Warum nicht stattdessen falsch? Ein paar intuitive Erklärungsversuche:

- Einem Politiker, der verspricht „Wenn ich gewählt werde, schenke ich jedem Wähler 1000€!“ würde man keine Falschaussage unterstellen, wenn er gar nicht gewählt wird. Nur wenn er wirklich gewählt wird (A ist wahr), aber kein Geld verschenkt (B ist falsch) könnten wir ihn einer Lüge bezichtigen.
- Wenn eine Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist sie gerade. Nimm die Zahl 7. Sie ist nicht durch 4 teilbar und auch nicht gerade, also haben wir $F \rightarrow F$. Trotzdem ist 7 offensichtlich kein Gegenbeispiel zur ursprünglichen Regel. Genau deshalb setzt die klassische Aussagenlogik $F \rightarrow F$ auf wahr.

Aufgabe 10: Fügen Sie der Wahrheitstabelle folgende Spalten hinzu.

- (a) $B \rightarrow A$,
- (b) $A \rightarrow \overline{B}$,
- (c) $\overline{A \rightarrow B}$,
- (d) $A \rightarrow F$.

Aufgabe 11: Formulieren Sie folgende Sätze als aussagenlogische Formeln:

- (a) Wenn es morgen regnet und ein guter Film läuft, dann gehen wir ins Kino.
- (b) Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, ändert sich das Wetter, oder es bleibt, wie es ist.

7 Tautologien

Besondere Bedeutung haben Aussagen, die *unabhängig* der Wahrheitswerte ihrer Teilaussagen immer wahr sind. Eine solche Aussage wird als *Tautologie* bezeichnet.

Definition 6 (Tautologie). *Eine zusammengesetzte Aussage heißt genau dann Tautologie, wenn Sie bei jeder möglichen Interpretation ihrer Teilaussagen mit Wahrheitswerten wahr ist.*

Die zu einer Tautologie gehörende Spalte einer Wahrheitstabelle enthält nur W.

Beispiel 11: Die Aussage $A \wedge B \rightarrow A$ ist eine Tautologie:

A	B	$A \wedge B$	$A \wedge B \rightarrow A$
W	W	W	W
W	F	F	W
F	W	F	W
F	F	F	W

Aufgabe 12: Weisen Sie nach, dass folgende Aussagen Tautologien sind. Interpretieren Sie!

- (a) $A \vee \overline{A}$
- (b) $A \rightarrow A$
- ! (c) $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$
- ! (d) $((A \rightarrow B) \wedge \overline{B}) \rightarrow \overline{A}$

8 Logische Äquivalenz

Von einer logischen Äquivalenz spricht man, wenn zwei logische Formeln unter **jeder möglichen Belegung denselben Wahrheitswert** besitzen. Mit anderen Worten:

Definition 7 (Äquivalenz). Zwei Aussagen A und B sind logisch äquivalent ($A \Leftrightarrow B$) genau dann, wenn die Bijunktion $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie ist.

Beispiel 12: Wir hatten weiter oben bereits folgende Wahrheitstabelle aufgestellt:

A	B	$\overline{\overline{A}}$	$A \leftrightarrow \overline{\overline{A}}$
W	W	W	W
W	F	W	W
F	W	F	W
F	F	F	W

Die Bijunktion $A \leftrightarrow \overline{\overline{A}}$ ist eine Tautologie, da die entsprechende Spalte nur den Wahrheitswert W enthält. Die Aussagen A und $\overline{\overline{A}}$ sind somit *äquivalent*! Wir schreiben: $A \Leftrightarrow \overline{\overline{A}}$.

Doppelte Negation

Für eine beliebige Aussage A gilt die logische Äquivalenz:

$$A \Leftrightarrow \overline{\overline{A}}.$$

Beispiel 13: Nun betrachten wir die Aussagen $\overline{\overline{A \vee B}}$ und $\overline{A} \wedge \overline{B}$.

A	B	$\overline{\overline{A \vee B}}$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$	$\overline{\overline{A \vee B}} \leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$
W	W	F	F	W
W	F	F	F	W
F	W	F	F	W
F	F	W	W	W

Die Aussagen $\overline{\overline{A \vee B}}$ und $\overline{A} \wedge \overline{B}$ sind daher ebenfalls äquivalent. Man bezeichnet diesen Zusammenhang als den ersten Teil des **De Morganschen Gesetzes**: $\overline{\overline{A \vee B}} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$

Aufgabe 13: Zeigen Sie den zweiten Teil des **De Morganschen Gesetzes**: $\overline{\overline{A \wedge B}} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$.

Diese beiden Äquivalenzen sind so bedeutend, dass wir sie festhalten:

De Morgansche Gesetze

Für zwei Aussagen A und B gelten die logischen Äquivalenzen:

$$\overline{(A \vee B)} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B},$$

und

$$\overline{(A \wedge B)} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}.$$

Aufgabe 14: Zeigen Sie, dass folgende Aussagen logisch äquivalent sind:

- (a) $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \rightarrow \overline{A})$
- (b) $(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$
- (c) $\overline{(A \rightarrow B)} \Leftrightarrow (A \wedge \overline{B})$
- (d) $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \vee B)$

Aufgabe 15: Prüfen Sie, ob die folgenden logischen Äquivalenzen gelten:

- (a) $A \Leftrightarrow A \vee (A \wedge \overline{A})$
- (b) $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow B$
- (c) $\overline{A} \vee \overline{B} \Leftrightarrow \overline{A \wedge B}$
- (d) $B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee B$

Wozu nützt logische Äquivalenz?

Logisch äquivalente (Teil-) Aussagen können wechselseitig gegeneinander **ausgetauscht** werden, ohne den Sinn und den Wahrheitswert der Gesamtaussage zu ändern. Dies eröffnet uns Möglichkeiten zur **Transformation** und Vereinfachung logischer Aussagen. Äquivalenzgesetze sind somit gewissermaßen unsere **Rechenregeln** für aussagenlogische Formeln.

Beispiel 14: Wir vereinfachen die unübersichtliche Formel $\overline{(A \rightarrow B)} \vee (\overline{A} \wedge B)$.

Für die Subjunktion $A \rightarrow B$ haben wir weiter oben gezeigt: $A \rightarrow B \Leftrightarrow \overline{A} \vee B$. Also:

$$\overline{(A \rightarrow B)} \vee (\overline{A} \wedge B) \Leftrightarrow \overline{(\overline{A} \vee B)} \vee (\overline{A} \wedge B)$$

Jetzt verwenden wir **De Morgan**: $\overline{(\overline{A} \vee B)} \Leftrightarrow \overline{\overline{A}} \wedge \overline{B}$ und die **doppelte Negation** $\overline{\overline{A}} \Leftrightarrow A$:

$$\overline{(\overline{A} \vee B)} \vee (\overline{A} \wedge B) \Leftrightarrow (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)$$

Dies bedeutet: A ist wahr und B ist falsch, oder A ist falsch und B ist wahr. A und B haben also **unterschiedliche Wahrheitswerte**. Das können wir kompakter schreiben als:

$$(A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B) \Leftrightarrow \overline{A \leftrightarrow B}$$

Damit haben wir insgesamt gezeigt:

$$\overline{(A \rightarrow B)} \vee (\overline{A} \wedge B) \Leftrightarrow \overline{A \leftrightarrow B}$$

Anmerkungen:

- Wir könnten gerade nachgewiesene Äquivalenz festhalten und in Zukunft für weitere Umformungen und Vereinfachungen in noch größeren Aussagen nutzen.
- Jetzt haben wir zum ersten Mal die Äquivalenz zweier Aussagen **ganz ohne Wahrheitswerttabellen** nachgewiesen. Toll! Diese Technik gibt uns die Möglichkeit, noch viel komplexere Äquivalenzen nachzuweisen.

Folgende Äquivalenzen sind wichtig, dass wir sie zum späteren Nachschlagen festhalten:

Wichtige Äquivalenzgesetze

$\overline{\overline{A}} \Leftrightarrow A$	Doppelte Negation
$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	Kommutativität
$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	Kommutativität
$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$	Assoziativität
$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$	Assoziativität
$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Distributivität
$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributivität
$\overline{(A \vee B)} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$	De Morgan 1
$\overline{(A \wedge B)} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$	De Morgan 2
$A \rightarrow B \Leftrightarrow \overline{A} \vee B$	Subjunktion
$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	Bijunktion
$A \rightarrow B \Leftrightarrow \overline{B} \rightarrow \overline{A}$	Kontraposition
$A \wedge A \Leftrightarrow A$	Idempotenz
$A \vee A \Leftrightarrow A$	Idempotenz
$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$	Absorbtion
$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$	Absorbtion
$A \wedge W \Leftrightarrow A$	Konjunktion mit Wahr
$A \wedge F \Leftrightarrow F$	Konjunktion mit Falsch
$A \vee W \Leftrightarrow W$	Disjunktion mit Wahr
$A \vee F \Leftrightarrow A$	Disjunktion mit Falsch
$A \wedge \overline{A} \Leftrightarrow F$	Widerspruch
$A \vee \overline{A} \Leftrightarrow T$	Ausgeschlossener Dritter

Aufgabe 16: Nutzen Sie Äquivalenzgesetze um zu zeigen: $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \overline{B}) \Leftrightarrow \overline{A}$.

Aufgabe 17: Formulieren Sie jeweils eine logisch äquivalente Aussage ausschließlich unter Verwendung von Negationen, Konjunktionen und Disjunktionen. Vereinfachen Sie die Ausdrücke anschließend so weit wie möglich.

(a) $A \rightarrow B$

(b) $A \leftrightarrow (A \vee B)$

(c) $\overline{\overline{A \rightarrow B}} \leftrightarrow A$

9 Implikationen (Logische Folgerung)

Zwei *äquivalente* Aussagen $A \leftrightarrow B$ können in *beide Richtungen* durcheinander ersetzt werden. In Beweisen ist es jedoch häufiger, dass man die Ersetzung **nur in eine Richtung** $A \Rightarrow B$ durchführen darf, während die Gegenrichtung $B \Rightarrow A$ nicht erlaubt ist. Man spricht dann von *Implikationen*.

Die Implikation $A \Rightarrow B$ stellt ein logisches Abhängigkeitsverhältnis zwischen den Aussagen A und B her. Sie sagt, dass B **automatisch immer erfüllt ist, wenn A erfüllt ist**, und zwar wieder unabhängig von den Wahrheitswerten ihrer Teilaussagen. Mit anderen Worten:

Definition 8 (Implikation). Eine Aussage A impliziert eine Aussage B (wir schreiben $A \Rightarrow B$) genau dann, wenn die Subjunktion $A \rightarrow B$ eine Tautologie ist.

Beispiel 15: Wir betrachten die Subjunktion $(A \wedge B) \rightarrow A$:

A	B	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \rightarrow A$	$A \rightarrow (A \wedge B)$
W	W	W	W	W
W	F	F	W	F
F	W	F	W	W
F	F	F	W	W

Wir sehen, dass die Subjunktion $(A \wedge B) \rightarrow A$ eine Tautologie ist. Mit anderen Worten: Die Aussage A ist immer wahr, sofern $A \wedge B$ wahr ist. Wir schreiben: $A \wedge B \Rightarrow A$. Allerdings ist die Gegenrichtung $A \rightarrow (A \wedge B)$ **keine** Tautologie, wie die letzte Spalte zeigt. Die Aussagen $A \wedge B$ und A sind also **nicht** äquivalent.

Beispiel 16: (Modus Ponens) Wir haben bereits $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$ als Tautologie erkannt:

A	B	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \wedge A$	$((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$	$B \rightarrow ((A \rightarrow B) \wedge A)$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	F	W	W
F	W	W	F	W	F
F	F	W	F	W	W

Da die Subjunktion $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$ eine Tautologie ist, ist B immer automatisch wahr, sofern $(A \rightarrow B) \wedge A$ wahr ist. Die Gegenrichtung $B \rightarrow ((A \rightarrow B) \wedge A)$ ist jedoch *keine* Tautologie, wie wir an der letzten Spalte sehen. Die Aussagen A und $(A \rightarrow B) \wedge A$ sind damit **nicht** äquivalent.

Aufgabe 18: Prüfen Sie, ob die folgenden logischen Implikationen gelten:

- (a) $A \Rightarrow A$
- (b) $(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)$
- (c) $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$

Anwendung beim logischen Schließen

Ähnlich wie Äquivalenzen verwenden wir Implikationen $A \Rightarrow B$ als **Schlussregeln** zur **Umformung** aussagenlogischer Formeln. Allerdings ist die Umformung hier nur **in einer Richtung** erlaubt. Wir dürfen A durch B ersetzen, aber nicht umgekehrt.

Der zentrale **Unterschied** zwischen Äquivalenz und Implikation:

- Mit **Äquivalenzen** $A \Leftrightarrow B$ können wir aussagenlogische Formeln in beliebige Richtungen **umformen und vereinfachen**, ohne dass Informationen verloren gehen. Diese Umformungen können rückgängig gemacht werden.
- Mit **Implikationen** $A \Rightarrow B$ können wir **ableiten und schlussfolgern**. Dabei gehen im Allgemeinen Informationen verloren, da A wesentlich stärker bzw. spezifischer sein kann als B. Haben wir einmal eine Aussage B abgeleitet, können wir diese typischerweise nicht wieder zurück nach A überführen.

Auch hier lohnt sich eine Zusammenstellung der wichtigsten Schlussregeln. Teile davon werden wir in den kommenden Tagen als Grundlage von Beweistechniken wieder sehen.

Wichtige Schlussregeln

$(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$	Modus Ponens
$(A \rightarrow B) \wedge \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$	Modus Tollens
$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow A \rightarrow C$	Transitivität
$(A \vee B) \wedge \bar{A} \Rightarrow B$	Disjunktiver Syllogismus
$(A \wedge B) \Rightarrow A$	Konjunktionselemination
$(A \wedge B) \Rightarrow B$	Konjunktionselemination

Anmerkungen zu Begriffen und Notation

- Je nach Lehrbuch oder Dozent wird häufig nicht scharf zwischen der *Subjunktion* (als Operator) und der *Implikation* (als Folgerungsbeziehung zwischen Aussagen) unterschieden. Dann sind die Begriffe praktisch Synonyme. Beispielsweise liest man häufig:

Die Implikation $A \rightarrow B$ ist genau dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist.

Hier bedeutet „Implikation“ schlicht Subjunktion. Diese Mehrdeutigkeit ist zunächst nicht schlimm, da aus dem Kontext meist klar wird, was gemeint ist.

- Problematisch wird es erst, wenn dasselbe Buch ohne Erklärung auch die Folgerungsbeziehung $A \Rightarrow B$ zwischen den Aussagen „Implikation“ nennt und anschließend zwischen beiden hin- und herspringt.
- Ähnliches gilt für die Bijunktion $\leftrightarrow$ (Operator) und Äquivalenz $\Leftrightarrow$ (Ersetzungsregel).
- Der tiefere Unterschied ist jeweils **Objektsprache vs. Metasprache**: Mit $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ bilden wir **aussagelogische Formeln**; mit $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ beschreiben wir **Beziehungen zwischen Formeln**. Kurz zusammengefasst:

Formel	wenn Tautologie, dann	und das heißt?
$A \leftrightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$ ist Äquivalenz	A und B dürfen beliebig ausgetauscht werden
$A \rightarrow B$	$A \Rightarrow B$ ist Implikation	B darf aus A abgeleitet werden (nicht umgekehrt)

- Es hilft folgende **Faustregel**:
 - **Innerhalb einer** aussagenlogischen Formel verwenden wir $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$.
 - **Zwischen zwei** Aussagen beim Umformen und Beweisen nehmen wir $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$.

10 Aussageformen

Häufig sind mathematische Ausdrücke abhängig von einer freien Variablen, z. B.: n ist gerade. Der Ausdruck enthält also gewissermaßen eine Lücke, die gefüllt wird, indem für n ein konkreter Wert eingesetzt wird. Solche Ausdrücke nennen wir *Aussageformen*.

Definition 9 (Aussageform). *Eine Aussageform ist ein aus Wörtern oder mathematischen Zeichen aufgebauter Ausdruck mit mindestens einer Variablen, der durch Einsetzen eines konkreten Wertes zu einer Aussage wird.*

Beispiel 17:

- $A(x): x > 2$
- $A(y): y$ ist ein Mensch.
- $A(n):$ Ist n eine gerade Zahl, so ist n^2 ebenfalls gerade.

Die Frage „Ist es wahr, dass $x > 2$?“ kann ohne Kenntnis von x nicht sinnvoll beantwortet werden. Erst durch Einsetzen eines konkreten Wertes (z.B. $x = 4$) entsteht eine sinnvolle Frage: Ist es wahr, dass $4 > 2$?

Eine Aussageform kann auf zwei Weisen zu einer Aussage werden:

- Durch Einsetzen eines konkreten Wertes für die Variable (z. B. $x = 3$).
- Durch den Einsatz von *Quantoren* (dazu gleich mehr).

10.1 Quantoren

Aussageformen können mit Hilfe von Quantoren zu Aussagen gemacht werden. Wir betrachten zwei Arten von Quantoren: Den All-Quantor $\forall$ (umgedrehtes „A“) und den Existenz-Quantor $\exists$ (umgedrehtes „E“).

10.1.1 All-Quantor und All-Aussagen

Soll eine Aussageform $A(x)$ für alle Werte eines gewissen Wertebereiches gelten, machen wir dies mit dem *All-Quantor* $\forall$ kenntlich.

Definition 10 (All-Aussage). Die All-Aussage $\forall x \in \Omega: A(x)$ ist genau dann wahr, wenn $A(x)$ für alle Werte x aus dem gegebenen Wertebereich Ω wahr ist.

Beispiel 18:

- $\forall x \in \mathbb{R}: x > 2$ (Falsche Aussage, da $1 \not> 2$ und $1 \in \mathbb{R}$.)
- $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$ (Wahre Aussage)

10.1.2 Existenz-Quantor und Existenz-Aussagen

Reicht es aus, dass eine Aussageform $A(x)$ für mindestens einen Wert x aus dem Wertebereich Ω gilt, verwenden wir den *Existenz-Quantor* $\exists$.

Definition 11 (Existenz-Aussage). Die Existenz-Aussage $\exists x \in \Omega: A(x)$ ist genau dann wahr, wenn $A(x)$ für mindestens einen Wert x aus dem gegebenen Wertebereich Ω wahr ist.

Beispiel 19:

- $\exists x \in \mathbb{R}: 2x = 4$ (Wahre Aussage, z.B. mit $x = 2$.)
- $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 = 4$ (Wahre Aussage, z.B. mit $x = 2$ und $x = -2$.)
- $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 > 4$ (Wahre Aussage, z.B. mit $x = 4$)
- $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 < 0$ (Falsche Aussage)

Aufgabe 19: Geben Sie folgenden Aussagen einen sprachlichen Inhalt.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}: \exists y \in \mathbb{R}: y < x$

(b) $\exists y \in \mathbb{R}: \forall x \in \mathbb{R}: y < x$

(c) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \exists \varepsilon \in \mathbb{R}: x + \varepsilon = y$

(d) $\overline{\exists n \in \mathbb{Z}: n^2 < 0}$

Aufgabe 20: Formulieren Sie folgende Sachverhalte als aussagenlogische Ausdrücke:

- (a) Das Quadrat aller ganzen Zahlen ist nicht-negativ.
- (b) Es gibt keine ganze Zahl, deren Quadrat negativ ist.
- (c) Es gibt eine ganze Zahl, deren Wurzel nicht ganzzahlig ist.
- (d) Jede reelle Zahl kann als Produkt zweier reeller Zahlen dargestellt werden.
- (e) Für alle reellen Zahlen x und y gilt: Wenn x und y negativ sind, dann ist $x \cdot y$ positiv.
- (f) Es gibt keine reelle Zahl, die nicht Summe zweier reeller Zahlen ist.

10.2 Negation von All- und Existenzaussagen

Besonderes Augenmerk gilt der Negation von All- und Existenzaussagen.

Vorüberlegung (Teil 1)

- Offenbar ist eine All-Aussage der Form $\forall x \in \Omega: A(x)$ bereits falsch, wenn es mindestens ein Element $x \in \Omega$ gibt, welche die Eigenschaft $A(x)$ nicht erfüllt.

→ Die Negation der All-Aussage $\forall x \in \Omega: A(x)$ ist die Existenz-Aussage $\exists x \in \Omega: \overline{A(x)}$.

Vorüberlegung (Teil 2)

- Umgekehrt ist eine Existenz-Aussage $\exists x \in \Omega: A(x)$ offenbar falsch, wenn alle $x \in \Omega$ die Eigenschaft $A(x)$ verletzen.

→ Die Negation der Existenz-Aussage $\exists x \in \Omega: A(x)$ ist die All-Aussage $\forall x \in \Omega: \overline{A(x)}$.

Wir halten folgende Äquivalenzen fest:

Negation von All- und Existenzaussagen

Für beliebige All- und Existenzaussagen gilt:

$$\overline{\forall n \in \Omega: A(n)} \Leftrightarrow \exists x \in \Omega: \overline{A(x)},$$

und

$$\overline{\exists n \in \Omega: A(n)} \Leftrightarrow \forall x \in \Omega: \overline{A(x)}.$$

Auf diese Weise lassen sich Negationen von All- und Existenzaussagen systematisch in eine für uns Menschen verständlichere Form überführen, in der Negationen so sparsam und weit hinten wie möglich vorkommen.

Aufgabe 21: Negieren Sie die Aussagen aus der vorangegangenen Aufgabe und vereinfachen Sie diese in eine möglichst verständliche Form, in der Negationen so weit hinten wie möglich auftreten. Geben Sie den Aussagen anschließend einen sprachlichen Inhalt und prüfen Sie ihren Wahrheitswert.