



Teil 10: Vollständige Induktion

Die *vollständige Induktion* ist eine Beweistechnik für All-Aussagen der Form $\forall n \in \mathbb{N}: A(n)$. Darüber hinaus lässt sie sich leicht von natürlichen Zahlen auf andere diskrete Strukturen wie Graphen, Zeichenketten, etc. erweitern.

Ziel: Beweis einer All-Aussage $\forall n \in \mathbb{N}: A(n)$.

Vorüberlegung:

- Es ist oft schwer, die All-Aussage $\forall n \in \mathbb{N}: A(n)$ direkt zu beweisen.
- Manchmal ist es leichter, die Aussage $\forall n \in \mathbb{N}: A(n) \rightarrow A(n+1)$ zu beweisen.
 - Achtung: Das ist nicht die zu beweisende Aussage (und auch nicht äquivalent)!
- Angenommen, wir könnten nachweisen, dass folgende Aussage wahr ist:

$$A(1) \wedge \forall n \in \mathbb{N}: A(n) \rightarrow A(n+1).$$

- Der Ausdruck $\forall n \in \mathbb{N}: A(n) \rightarrow A(n+1)$ bedeutet
 - $A(1) \rightarrow A(2)$,
 - $A(2) \rightarrow A(3)$,
 - $A(3) \rightarrow A(4)$, etc.
- Dann können wir durch wiederholte Ausführung des Modus Ponens ableiten:

$$\begin{aligned} & \underbrace{A(1) \wedge (A(1) \rightarrow A(2))}_{\Rightarrow A(2)} \wedge (A(2) \rightarrow A(3)) \wedge (A(3) \rightarrow A(4)) \wedge \dots \\ \Rightarrow & \underbrace{A(2) \wedge (A(2) \rightarrow A(3))}_{\Rightarrow A(3)} \wedge (A(3) \rightarrow A(4)) \wedge \dots \\ \Rightarrow & \underbrace{A(3) \wedge (A(3) \rightarrow A(4))}_{\Rightarrow A(4)} \wedge \dots \\ \Rightarrow & A(4) \wedge \dots \end{aligned}$$

- In jedem Schritt leiten wir eine weitere Aussage $A(k)$ ab.
- Es tritt eine Kettenreaktion ein, aus der folgt, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist:

$$A(1) \Rightarrow A(2) \Rightarrow A(3) \Rightarrow A(4) \Rightarrow \dots$$

- Das Prinzip ist vergleichbar mit einem Domino-Effekt:
 - Der Anstoß des ersten Steines $A(1)$ sorgt dafür, dass alle weiteren Steine fallen.
- Aus $A(1) \wedge \forall n \in \mathbb{N}: A(n) \rightarrow A(n+1)$ folgt also, dass $\forall n \in \mathbb{N}: A(n)$ gilt.

Beweisstruktur

- Induktionsanfang: Wir beweisen, dass die Aussage $A(1)$ wahr ist.
- Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl.
 - Induktionsannahme: $A(n)$ ist wahr.
 - Induktionsbehauptung: $\forall n \in \mathbb{N}: A(n) \rightarrow A(n+1)$
 - Die Induktionsbehauptung beweisen wir mit einem direkten Beweis.
- Induktionsschluss: Wir stellen fest, dass aus Induktionsanfang und Induktionsschritt die zu beweisende All-Aussage $\forall n \in \mathbb{N}: A(n)$ folgt.

Beispiel 1: Wir demonstrieren das Prinzip an folgendem Satz:

Satz 1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n \cdot (n+1)$ ist gerade.

Struktur des Satzes: $\forall n \in \mathbb{N}: A(n)$ mit

- $A(n)$: $n \cdot (n+1)$ ist gerade.
- $\rightarrow A(n+1)$: $(n+1)(n+2)$ ist gerade.

Induktionsbeweis.

- Induktionsanfang: Die Aussage $A(1)$ ist wahr, da $1 \cdot (1+1) = 2$ gerade ist.
- Induktionsschritt: Sei n eine beliebige natürliche Zahl.
 - Induktionsannahme: Wir nehmen an, die Aussage $A(n)$ sei wahr, dass also gilt:

$$n \cdot (n+1) \text{ ist gerade.}$$
 - Induktionsbehauptung: Wir behaupten, dass $A(n+1)$ aus $A(n)$ folgt, d. h.:

$$n \cdot (n+1) \text{ gerade} \rightarrow (n+1) \cdot (n+2) \text{ gerade.}$$
 - Wir beweisen die Induktionsbehauptung:

Aussage

$n \cdot (n+1)$ ist gerade

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}: n \cdot (n+1) = 2m$$

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}: n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1) = 2m + 2 \cdot (n+1)$$

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}: (n+1) \cdot (n+2) = 2(m+n+1)$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: (n+1) \cdot (n+2) = 2k$$

$$\Rightarrow (n+1) \cdot (n+2) \text{ ist gerade}$$

Begründung

(Induktionsannahme)

(Definition „gerade“)

(Beids. Add. erhält Gleichheit)

(Ausklammern, Zusammenfassen)

($k = m + n + 1 \in \mathbb{N}$)

(Definition „gerade“)

- Induktionsschluss: Aus Induktionsanfang und -schritt folgt, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt: $n \cdot (n+1)$ ist gerade

□

Aufgabe 1: Warum haben wir beim Beweis der Induktionsbehauptung ausgerechnet den Term $2(n + 1)$ hinzu addiert? Wie kommen wir auf diesen Term?

Beispiel 2: Wir kennen bereits folgenden Satz (Gaußsche Summenformel):

Satz 2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Struktur des Satzes: $\forall n \in \mathbb{N}: A(n)$ mit

- $A(n): \sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.
- $A(n + 1): \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$.

Induktionsbeweis.

- Induktionsanfang: Die Aussage $A(1)$ ist wahr, da

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}.$$

- Induktionsschritt: Sei n eine beliebige natürliche Zahl.
 - Induktionsannahme: Wir nehmen an, die Aussage $A(n)$ sei wahr, dass also gilt:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}.$$

- Induktionsbehauptung: Wir behaupten, dass $A(n + 1)$ aus $A(n)$ folgt, d. h.:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \quad \rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n + 1) \cdot (n + 2)}{2}.$$

- Wir beweisen die Induktionsbehauptung:

Aussage	Begründung
$\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$	(Induktionsannahme)
$\Rightarrow \sum_{k=1}^n k + (n + 1) = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} + (n + 1)$	(Beidseitige Addition erhält Gleichheit)
$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} + (n + 1)$	(Zusammenziehen zu einer Summe)
$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} + \frac{2 \cdot (n + 1)}{2}$	(Erweitern mit Faktor 2)
$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n + 2) \cdot (n + 1)}{2}$	(Zusammenfassen)

- Induktionsschluss: Aus Induktionsanfang und -schritt folgt, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

□

Begriffsklärung Bei vollständigen Induktion werden häufig Begrifflichkeiten wie Induktionsannahme, -voraussetzung, -behauptung, etc. miteinander vermischt. Wir versuchen, etwas Ordnung in diese Begriffe zu bringen.

- *Induktionsanfang*: Erster Teil eines Induktionsbeweises. Beweis, dass $A(1)$ wahr ist.
- *Induktionsschritt*: Zweiter Teil eines Induktionsbeweises. Beweis, dass $A(n+1)$ aus $A(n)$ folgt. Alternative Bezeichnung: Schluss von n auf $n+1$.
- *Induktionsannahme*: Die Induktionsannahme ist die Annahme, $A(n)$ sei wahr. Alternative Bezeichnungen: Induktionsvoraussetzung, Induktionshypothese.
- *Induktionsbehauptung*: Die Induktionsbehauptung ist die Behauptung, $A(n+1)$ sei wahr, sofern $A(n)$ wahr ist (dass also $\forall n \in \mathbb{N}: A(n) \rightarrow A(n+1)$ gilt).
- *Induktionsschluss*: Abschließende Bemerkung, dass aus Induktionsanfang und -schritt die zu beweisende All-Aussage $\forall n \in \mathbb{N}: A(n)$ folgt. Wird oft weggelassen, da es sich um einen Formalismus handelt.

Aufgabe 2: Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n :

(a) $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1.$

! (c) $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}: n = 2m \vee n = 2m-1.$

(d) $\forall n \in \mathbb{N}: 7 \mid (8^n - 1).$

(e) $\forall n \in \mathbb{N}: \prod_{k=1}^n \frac{k+2}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} k.$

* (f) $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}.$

Erweiterung des Induktionsprinzips

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion lassen sich leicht auch All-Aussagen der Form

$$\forall n \in \mathbb{N}: n > n_0 \rightarrow A(n)$$

beweisen. Die Aussagen $A(1)$ bis $A(n_0)$ dürfen somit wahr oder falsch sein. Es geht uns nur darum zu zeigen, dass $A(n)$ für alle hinreichend großen $n > n_0$ wahr ist.

Modifikation der Beweisstruktur:

- Induktionsanfang: Wähle $n = n_0 + 1$ statt $n = 1$.
- Induktionsschritt: Betrachte eine beliebige natürliche Zahl $n > n_0$.

Beispiel 3: Für alle natürlichen Zahlen $n > 2$ gilt $2n + 1 < n^2$.

Struktur: $\forall n \in \mathbb{N}: n > 2 \rightarrow A(n)$

- $A(n): 2n + 1 < n^2$

$$\Rightarrow A(n+1): 2(n+1) + 1 < (n+1)^2$$

Beobachtung: Offenbar sind die Aussagen $A(1)$ und $A(2)$ falsch, wie folgende Tabelle zeigt:

n	$2n + 1$	n^2
1	3	1
2	5	4
3	7	9
4	9	16

Beweis.

- Induktionsanfang: Die Aussage $A(3)$ ist wahr, da $2n + 1 = 7 < 9 = 3^2 = n^2$.
- Induktionsschritt: Sei n eine beliebige natürliche Zahl mit der Eigenschaft $n > 2$.
 - Induktionsannahme: Es gilt $2n + 1 < n^2$.
 - Induktionsbehauptung: Aus $2n + 1 < n^2$ folgt $2(n+1) + 1 < (n+1)^2$.
 - Beweis der Induktionsbehauptung:

Aussage

$$2n + 1 < n^2$$

$$\Rightarrow \exists m_1 \in \mathbb{N}: n^2 = 2n + 1 + m_1$$

$$\Rightarrow \exists m_1 \in \mathbb{N}: n^2 + 2n + 1 = 2n + 1 + m_1 + 2n + 1$$

$$\Rightarrow \exists m_1 \in \mathbb{N}: (n+1)^2 = 2n + 1 + m_1 + 2n + 1$$

Begründung

(Induktionsannahme)

(Definition „kleiner“)

(Beids. Add. erhält Gleichheit)

(Erste Binomische Formel)

Im nächsten Schritt nutzen wir aus, dass $n > 1$ gilt, d.h. $\exists m_2 \in \mathbb{N}: 2n = 2 + m_2$.

$$\Rightarrow \exists m_1, m_2 \in \mathbb{N}: (n+1)^2 = 2n + 1 + m_1 + 2 + m_2 + 1 \quad (n > 1)$$

$$\Rightarrow \exists m_1, m_2 \in \mathbb{N}: (n+1)^2 = (2n + 2 + 1) + m_1 + m_2 + 1 \quad (\text{Umordnen der Summanden})$$

$$\Rightarrow \exists m_1, m_2 \in \mathbb{N}: (n+1)^2 = 2(n+1) + 1 + m_1 + m_2 + 1 \quad (2(n+1) = 2n + 2)$$

$$\Rightarrow \exists m_3 \in \mathbb{N}: (n+1)^2 = 2(n+1) + 1 + m_3 \quad (m_3 = m_1 + m_2 + 1 \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow 2(n+1) + 1 < (n+1)^2 \quad (\text{Definition „kleiner“})$$

- Induktionsschluss: Aus Induktionsanfang und -schritt folgt, dass für alle natürlichen Zahlen $n > 2$ gilt: $2n + 1 < n^2$.

□

Aufgabe 3: Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: $\forall n \in \mathbb{N}: n > 4 \rightarrow n^2 < 2^n$.