



Teil 8: Direkter Beweis

Die am weitesten verbreitete Beweistechnik ist der *direkte Beweis*.

Vorüberlegung:

- Wir erinnern uns an die Schlussregel *Modus Ponens*:

$$A \wedge (A \rightarrow B) \Rightarrow B$$

Diese können wir verwenden, um (Teil-) Ausdrücke der Form $A \wedge (A \rightarrow B)$ durch B zu ersetzen ohne den Wahrheitswert der Grundaussage zu verändern.

- Kennen wir zusätzlich die Subjunktionen $B \rightarrow C$ und $C \rightarrow D$, dann können wir die Schlussregel wiederholt anwenden um D aus A und allen Subjunktionen abzuleiten:

$$\begin{aligned} & A \wedge (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow D) \\ & \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\Rightarrow B} \\ \Rightarrow & B \wedge (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow D) \\ & \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\Rightarrow C} \\ \Rightarrow & C \wedge (C \rightarrow D) \\ & \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\Rightarrow D} \\ \Rightarrow & D \end{aligned}$$

- Um diese recht längliche Notation in den folgenden Kapiteln ein wenig einzukürzen, interpretieren wir den Modus Ponens ab sofort als: *Aus A folgt B aufgrund $A \rightarrow B$.*
- In dieser Interpretation können wir die oben gezeigte Folge von Ableitungen kompakter als eine sogenannte *Ableitungskette* darstellen, in der jede Zeile eine neue Anwendung des Modus Ponens darstellt:

Aussage	Begründung
A	
$\Rightarrow B$	(Begründung für $A \rightarrow B$)
$\Rightarrow C$	(Begründung für $B \rightarrow C$)
$\Rightarrow D$	(Begründung für $C \rightarrow D$)

- Das Zeichen $\Rightarrow$ ist in dieser Interpretation als *Daraus folgt ... aufgrund ...* zu verstehen.
- Ist die erste Aussage A einer Ableitungskette wahr, dann
 - wird deren Wahrheit nach unten auf alle weiteren Aussagen übertragen.

- Dabei muss in jedem Schritt entsprechend begründet werden, weshalb die Ableitung erlaubt ist. Typische Begründungen sind
 - Definitionen und Axiomen,
 - bereits bewiesene Sätze,
 - Abschwächung zu Existenzaussagen,
 - äquivalenten Umformungen,
 - nachvollziehbare Schlussfolgerungen.

1 Beweis einfacher Aussagen

Wir betrachten zunächst Beweise einfacher (= nicht zusammengesetzter) Aussagen.

Ziel: Wir wollen formal nachweisen, dass eine Aussage A wahr ist.

Beweisstruktur:

- Ausgangspunkt: Axiom (= beweislos als wahr akzeptierte Aussage) A_0
- Vorgehen: Ableiten einer Ableitungskette, an deren Ende A steht.

	Aussage	Begründung
	A_0	(Axiom)
$\Rightarrow$	A_1	(Begründung für $A_0 \rightarrow A_1$)
$\Rightarrow$	A_2	(Begründung für $A_1 \rightarrow A_2$)
$\dots$		
$\Rightarrow$	A	(Begründung für $A_m \rightarrow A$)

- Sofern wir A_0 als wahr annehmen, folgt damit unmittelbar, dass auch A wahr ist.

Beispiel 1: Wir beweisen die Aussage: 6 ist gerade.

Beweis.

	Aussage	Begründung
	$6 = 3 \cdot 2$	(Axiom)
$\Rightarrow$	$\exists m \in \mathbb{N}: 6 = 2 \cdot m$	(Abschwächung, für $m = 3 \in \mathbb{N}$)
$\Rightarrow$	6 ist gerade	(wenn-Richtung der Definition „gerade“ und Axiom: $6 \in \mathbb{N}$)

□

Analysieren wir diesen Beweis:

- Im Laufe des Beweises verwenden wir verschiedene Axiome: $6 = 3 \cdot 2$, $3 \in \mathbb{N}$, $6 \in \mathbb{N}$.

- Wir beginnen mit einer als wahr angenommenen Aussage: $6 = 3 \cdot 2$.
- Da 3 eine natürliche Zahl ist, können wir diese zu einer Existenzaussage abschwächen.
- Wir wenden nun die *wenn*-Richtung der Definition „gerade“ an.

$$\forall n \in \mathbb{N}: \exists m \in \mathbb{N}: n = 2m \rightarrow n \text{ gerade}$$

Hier in dem Spezialfall $n = 6$, das heißt

$$\exists m \in \mathbb{N}: 6 = 2m \rightarrow 6 \text{ gerade}$$

- Jeder einzelne Schritt ist begründet. Die Ableitungskette ist lückenlos.

Anmerkungen:

- Streng genommen haben wir nur folgende Subjunktion bewiesen:

$$(3 \in \mathbb{N} \wedge 6 \in \mathbb{N} \wedge 6 = 3 \cdot 2) \rightarrow 6 \text{ gerade}$$

- Unser Beweis hängt also davon ab, dass diese Voraussetzungen erfüllt sind.
- Wir können keine Aussagen „aus dem luftleeren Raum heraus“ beweisen. Wir benötigen stets einen Ausgangspunkt, auf dem wir den Beweis aufbauen. Das sind Axiome.
- Ein Großteil der Mathematik ist axiomatisch aufgebaut.

Aufgabe 1: Beweisen Sie mittels direktem Beweis:

- (a) 12 ist gerade.
- (b) $3 \mid 12$
- (c) $1 < 4$
- (d) 6 ist nicht prim.

2 Beweis von All-Aussagen

Ein Spezialfall liegt vor, wenn die zu beweisende Aussage eine All-Aussage ist.

Ziel: Beweis einer Aussage $\forall n \in \mathbb{N}: A(n)$.

Beweisstruktur:

- Wir betrachten eine *beliebige* (= irgendeine, uns unbekannte) natürliche Zahl n .
 - Diese dient im Folgenden stellvertretend für *alle* natürlichen Zahlen.
 - Alle Aussagen über n gelten somit für allgemein für alle natürlichen Zahlen.
- Ausgangspunkt (*Prämisse*): $n \in \mathbb{N}$.
- Vorgehen: Aufstellen einer Ableitungskette, an deren Ende $A(n)$ steht:

Aussage	Begründung
$n \in \mathbb{N}$	(Prämisse)
$\Rightarrow A_1(n)$	(Begründung für $n \in \mathbb{N} \rightarrow A_1(n)$)
$\Rightarrow A_2(n)$	(Begründung für $A_1(n) \rightarrow A_2(n)$)
...	
$\Rightarrow A(n)$	(Begründung für $A_m(n) \rightarrow A(n)$)

Beispiel 2: Wir beweisen die Aussage: $\forall n \in \mathbb{N}: 4n + 6$ ist gerade.

Beweis. Sei n eine beliebige natürliche Zahl.

Aussage	Begründung
$n \in \mathbb{N}$	(Prämisse)
$\Rightarrow 2n + 3 \in \mathbb{N}$	$(\forall m, n, k \in \mathbb{N}: mn + k \in \mathbb{N})$
$\Rightarrow 2 \cdot (2n + 3) \in \mathbb{N}$	$(\forall m, n \in \mathbb{N}: mn \in \mathbb{N})$
$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}: 2 \cdot (2n + 3) = 2m \in \mathbb{N}$	(Abschwächung, für $m = 2n + 3$)
$\Rightarrow 2 \cdot (2n + 3)$ gerade	(<i>wenn</i> -Richtung der Definition „gerade“)
$\Rightarrow 4n + 6$ gerade	$(\forall m, n, k \in \mathbb{N}: m(n + k) = mn + mk)$

□

Interessant ist die Anwendung der *wenn*-Richtung der Definition „gerade“. Diese konnten wir anwenden, weil wir zuvor gezeigt haben, dass

- $2 \cdot (2n + 3)$ eine natürliche Zahl ist, und dass
- $2n + 3$ eine natürliche Zahl ist.

Aufgabe 2: Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels direkter Beweise:

- $\forall n \in \mathbb{N}: 1 \mid n$
- Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt: $a \mid (ab)$.
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $6n + 5$ ist ungerade.
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n^2 + 2n + 1$ ist nicht prim.

3 Beweis von Implikationen

Der häufigste Anwendungsfall direkter Beweise sind Aussagen wie $\forall n \in \mathbb{N}: A(n) \rightarrow B(n)$.

Ziel: Nachweis der All-Aussage $\forall n \in \mathbb{N}: A(n) \rightarrow B(n)$.

Beweisstruktur

- Wir betrachten eine beliebige natürliche Zahl n .
- Ausgangspunkt (*Prämisse*): $A(n)$.
- Vorgehen: Aufstellen einer Ableitungskette, an deren Ende $B(n)$ steht:

Aussage	Begründung
$A(n)$	(Prämisse)
$\Rightarrow A_1(n)$	(Begründung für $A(n) \rightarrow A_1(n)$)
$\Rightarrow A_2(n)$	(Begründung für $A_1(n) \rightarrow A_2(n)$)
$\dots$	
$\Rightarrow B(n)$	(Begründung für $A_m(n) \rightarrow B(n)$)

Beispiel 3: Wir beweisen folgenden Satz.

Satz 1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn n durch 4 teilbar ist, dann ist n auch durch 2 teilbar.

Der Satz hat die Struktur $\forall n \in \mathbb{N}: A(n) \rightarrow B(n)$.

- $A(n): 4 \mid n$
- $B(n): 2 \mid n$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl.

Aussage	Begründung
$4 \mid n$	(Prämisse)
$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}: n = 4m$	(genau-dann-Richtung der Definition „teilbar“)
$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}: n = 2 \cdot 2m$	($4 = 2 \cdot 2$)
$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: n = 2k$	(Wenn $m \in \mathbb{N}$, dann $k = 2m \in \mathbb{N}$)
$\Rightarrow 2 \mid n$	(wenn-Richtung der Definition „teilbar“)

□

Beispiel 4: Wir beweisen folgenden Satz:

Satz 2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn n gerade ist, dann ist n^2 ebenfalls gerade.

Der Satz hat die Struktur $\forall n \in \mathbb{N}: A(n) \rightarrow A(n^2)$.

- $A(x)$: x ist gerade.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl.

Aussage	Begründung
n ist gerade	(Prämisse)
$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}: n = 2m$	(<i>genau-dann</i> -Richtung der Definition „gerade“)
$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}: n^2 = (2m)^2$	(Beidseitiges Quadrieren erhält Gleichheit)
$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}: n^2 = 2 \cdot 2m^2$	(Potenzgesetze)
$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: n^2 = 2 \cdot k$	(Wenn $m \in \mathbb{N}$, dann $k = 2m^2 \in \mathbb{N}$)
$\Rightarrow n^2$ ist gerade.	(<i>wenn</i> -Richtung der Definition „gerade“)

□

Aufgabe 3: Beweisen Sie folgende Aussagen mittels direkter Beweise:

- Für alle natürlichen m, n gilt: Wenn $n < m$, dann $n^2 < m^2$.
- Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn m gerade ist, dann ist $m \cdot n$ gerade.
- Die Summe zweier gerader natürlicher Zahlen ist gerade.
- Für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $x < y$, dann $x + z < y + z$.
- Für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$ gilt: Aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$.
- $\forall a, b, c \in \mathbb{N}: (a \mid b) \wedge (b \mid c) \Rightarrow (a \mid c)$
- $\forall a, b, c, x, y \in \mathbb{N}: (a \mid b) \wedge (a \mid c) \Rightarrow (a \mid (xb + yc))$

4 Beweis von Äquivalenzen

Ebenfalls sehr häufig sind direkte Beweise für Aussagen der Form $\forall n \in \mathbb{N}: A(n) \leftrightarrow B(n)$.

Ziel: Nachweis der All-Aussage $\forall n \in \mathbb{N}: A(n) \leftrightarrow B(n)$.

Vorüberlegung:

- Wir haben zuvor gesehen, dass $A \leftrightarrow B$ logisch äquivalent ist zu $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

Beweisstruktur

- Beweis der *Hin-Richtung*: $\forall n \in \mathbb{N}: A(n) \rightarrow B(n)$
- Beweis der *Rück-Richtung*: $\forall n \in \mathbb{N}: B(n) \rightarrow A(n)$
- Beide Teile des Beweises können *unabhängig* voneinander bewiesen werden.
- Für die beiden Richtungen können verschiedene Beweistechniken verwendet werden.

Beispiel 5: Wir beweisen folgenden Satz.

Satz 3. Für alle natürlichen Zahlen m und n gilt: $n < m$ genau dann, wenn $m - n \in \mathbb{N}$.

Der Satz hat die Struktur $\forall m, n \in \mathbb{N}: n < m \leftrightarrow m - n \in \mathbb{N}$.

- Hin-Richtung: Zu zeigen ist: $\forall m, n \in \mathbb{N}: n < m \rightarrow m - n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Seien m, n beliebige natürliche Zahlen. Es gilt

Aussage	Begründung
$n < m$	(Prämisse)
$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: m = k + n$	(Definition „kleiner“)
$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: m - n = k + n - n$	(Beidseitige Subtr. von n erhält Gleichheit)
$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: m - n = k$	($\forall x \in \mathbb{R}: x - x = 0$)
$\Rightarrow m - n \in \mathbb{N}$	(Konkretisieren)

□

- Rück-Richtung: Zu zeigen ist: $\forall m, n \in \mathbb{N}: m - n \in \mathbb{N} \Rightarrow n < m$.

Beweis. Seien m, n beliebige natürliche Zahlen. Es gilt

Aussage	Begründung
$m - n \in \mathbb{N}$	(Prämisse)
$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: m - n = k$	(Abschwächung vorangegangener Aussage)
$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: m - n + n = k + n$	(Beidseitige Addition. von n erhält Gleichheit)
$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: m = k + n$	($\forall x \in \mathbb{R}: x - x = 0$)
$\Rightarrow n < m \in \mathbb{N}$	(Definition „kleiner“)

□

Hier haben wir einen Beweis, in dem die Hinrichtung eine *Umkehrung* der Rückrichtung ist, und umgekehrt. Das liegt daran, dass jeder Schritt der Ableitungskette *umkehrbar* ist. (Es handelt sich bei den Schritten der Ableitungskette nicht nur um Implikationen, sondern um Äquivalenzen.) Wenn dies der Fall ist, können wir beide Richtungen des Beweises in einem Schritt abhandeln:

Beweis. Seien m, n beliebige natürliche Zahlen. Es gilt

Aussage	Begründung
$n < m$	
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}: m = k + n$	(Definition „kleiner“)
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}: m - n = k + n - n$	(Beidseitige Subtr. von n erhält Gleichheit)
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}: m - n = k$	($\forall x \in \mathbb{R}: x - x = 0$)
$\Leftrightarrow m - n \in \mathbb{N}$	(Umformulierung)

□