



Teil 9: Widerspruchsbeweis

Im letzten Abschnitt haben wir den direkten Beweis kennengelernt. Wir lernen nun eine noch vielseitigere Beweistechnik kennen: den *Widerspruchsbeweis*.

Vorüberlegung:

- Widerspruch = falsche Aussage (F). Beispiel:
 - falsche mathematische Aussage: $1 = 2$ oder $2/3 \in \mathbb{N}$,
 - inkonsistente logische Aussage, z.B. $A \wedge \bar{A}$.
- Angenommen, wir könnten mittels einer Ableitungskette

Aussage	Begründung
A	(Prämisse)
$\Rightarrow B$	(Begründung für $A \rightarrow B$)
$\Rightarrow C$	(Begründung für $B \rightarrow C$)
$\Rightarrow D$	(Begründung für $C \rightarrow D$)
$\Rightarrow F$	(Begründung, warum D falsch ist)

aus einer Aussage A eine falsche Aussage F (= Widerspruch) ableiten.

- Dann muss A falsch sein. Warum?
 - Es gilt die Schlussregel *Modus Tollens*: $(A \rightarrow B) \wedge \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$.
 - In Worten: Ist $A \rightarrow B$ ein gültiger Schluss und B falsch, so ist A auch falsch.
 - Die „Falschheit“ von F wird also von unten nach oben auf A übertragen.
- Formal ist die Ableitungskette die wiederholte Anwendung des Modus Tollens:

$$\begin{aligned} & (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge \underbrace{(C \rightarrow D) \wedge \bar{D}}_{\Rightarrow \bar{C}} \\ \Rightarrow & (A \rightarrow B) \wedge \underbrace{(B \rightarrow C) \wedge \bar{C}}_{\Rightarrow \bar{B}} \\ \Rightarrow & \underbrace{(A \rightarrow B) \wedge \bar{B}}_{\Rightarrow \bar{A}} \\ \Rightarrow & \bar{A} \end{aligned}$$

- Meistens ist es jedoch gar nicht unser Ziel zu zeigen, dass A falsch ist. Wir wollen typischerweise beweisen, dass A wahr ist. Nichts leichter als das! Wir müssen dazu nur aus $\bar{A}$ einen Widerspruch ableiten!

1 Beweis einfacher Aussagen

Ziel: Beweis einer Aussage A .

Beweisstruktur

- Ausgangspunkt: Wir starten mit der Widerspruchsannahme $\bar{A}$.
- Vorgehen: Ableiten einer Ableitungskette bis zu einer falschen Aussage:

Aussage	Begründung
$\bar{A}$	(Widerspruchsannahme)
$\Rightarrow A_1$	(Begründung für $\bar{A} \rightarrow A_1$)
$\Rightarrow A_2$	(Begründung für $A_1 \rightarrow A_2$)
...	
$\Rightarrow A_m$	(Begründung für $A_{m-1} \rightarrow A_m$)
$\Rightarrow F$	(Begründung, warum A_m falsch ist)

- Beim Erreichen eines Widerspruchs wissen wir: Die Aussage $\bar{A}$ war falsch.
- Die Negation $\bar{\bar{A}}$ muss somit wahr sein. Da $\bar{\bar{A}}$ äquivalent zu A ist, ist auch A wahr.

Beispiel 1: Wir beweisen: 5 ist nicht gerade.

Widerspruchsbeweis. Durch Negation der zu beweisenden Aussage erhalten wir die Widerspruchsannahme: 5 ist gerade. Zum Zwecke eines Widerspruchsbeweises nehmen wir also an, 5 wäre eine gerade Zahl und leiten daraus eine falsche Aussage ab:

Aussage	Begründung
5 ist gerade	(Widerspruchsannahme)
$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}: 5 = 2 \cdot m$	(Definition „gerade“)
$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}: 5/2 = m$	(Beidseitiges Teilen durch 2 erhält Gleichheit)
$\Rightarrow 5/2 \in \mathbb{N}$	(Vereinfachen)
$\Rightarrow F$	$(\forall n \in \mathbb{N}: n + 1/2 \notin \mathbb{N})$

Hier liegt offenbar ein Widerspruch vor, da keine natürliche Zahl mit dem Wert $5/2$ existiert. Da alle Zwischenschritte schlüssig begründet und offenbar korrekt sind, muss unsere Widerspruchsannahme falsch sein. Deren Negation ist also wahr: 5 ist nicht gerade. $\square$

Aufgabe 1: Beweisen Sie per Widerspruchsbeweis:

- 5 ist nicht durch 4 teilbar ($4 \nmid 5$).
- 10 ist gerade.
- $4 \geq 2$
- 6 ist nicht prim.
- 5 ist prim.

2 Beweis von All-Aussagen

Ziel: Beweis einer Aussage der Form $\forall n \in \mathbb{N}: A(n)$.

Vorüberlegung:

- Angenommen, die zu beweisende Aussage $\forall n \in \mathbb{N}: A(n)$ ist falsch.
- Dann muss die Negation $\exists n \in \mathbb{N}: \overline{A(n)}$ der zu beweisenden Aussage wahr sein.
- Die Negation der zu beweisenden Aussage nennen wir *Widerspruchsannahme*.
- Können wir zeigen, dass aus der Widerspruchsannahme eine falsche Aussage folgt,
 - muss die Widerspruchsannahme ebenfalls falsch sein,
 - muss die ursprünglich zu beweisende Aussage wahr sein.

Beweisstruktur:

- Ausgangspunkt: Wir starten mit der Widerspruchsannahme: $\exists n \in \mathbb{N}: \overline{A(n)}$.
- Vorgehen: Aufstellen einer Ableitungskette mit F am Ende:

Aussage	Begründung
$\exists n \in \mathbb{N}: \overline{A(n)}$	(Widerspruchsannahme)
$\Rightarrow A_1$	(Begründung für $\exists n \in \mathbb{N} \rightarrow A_1$)
$\Rightarrow A_2$	(Begründung für $A_1 \rightarrow A_2$)
...	
$\Rightarrow A_m$	(Begründung für $A_{m-1} \rightarrow A_m$)
$\Rightarrow F$	(Begründung, warum A_m falsch ist)

Beispiel 2: Wir beweisen: Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $2n + 1$ ist nicht gerade.

Durch Negation des zu beweisenden Satzes erhalten wir die Widerspruchsannahme:

$$\begin{aligned}
 & \overline{\forall n \in \mathbb{N}: 2n + 1 \text{ nicht gerade}} \\
 \Leftrightarrow & \quad \exists n \in \mathbb{N}: \overline{2n + 1 \text{ nicht gerade}} \\
 \Leftrightarrow & \quad \exists n \in \mathbb{N}: 2n + 1 \text{ gerade} .
 \end{aligned}$$

Widerspruchsbeweis.

Aussage	Begründung
$\exists n \in \mathbb{N}: 2n + 1 \text{ gerade}$	(Widerspruchsannahme)
$\Rightarrow \exists n, m \in \mathbb{N}: 2n + 1 = 2m$	(Definition „gerade“)
$\Rightarrow \exists n, m \in \mathbb{N}: n + 1/2 = m$	(Division durch 2 erhält Gleichheit)
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: n + 1/2 \in \mathbb{N}$	(Vereinfachung)
$\Rightarrow F$	($\forall n \in \mathbb{N}: n + 1/2 \notin \mathbb{N}$)

□

Aufgabe 2: Beweisen Sie folgende Aussagen per Widerspruchsbeweis:

- (a) $\forall n \in \mathbb{N}: 4n + 6$ ist gerade.
- (b) Für keine natürliche Zahl n gilt: $n < n$.
- (c) Es gibt keine natürlichen Zahlen m und n , sodass gilt:

$$\frac{1}{m+n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$$

- (d) * Für alle natürlichen Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ gilt: $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.

3 Beweis von Implikationen

Ziel: Beweis einer Aussage der Form $\forall n \in \mathbb{N}: A(n) \rightarrow B(n)$.

Vorüberlegung:

- Sei $A \rightarrow B$ eine Subjunktion.
- Wie die folgende Wahrheitstabelle zeigt, ist $\overline{A \rightarrow B}$ äquivalent zu $A \wedge \overline{B}$

A	B	$\overline{B}$	$A \wedge \overline{B}$	$\overline{A \rightarrow B}$
W	W	F	F	F
W	F	W	W	W
F	W	F	F	F
F	F	W	F	F

- Die Negation von $A(n) \rightarrow B(n)$ ist also äquivalent zu $A(n) \wedge \overline{B(n)}$.

Beweisstruktur

- Ausgangspunkt: Widerspruchsannahme (= Negation der zu beweisenden Aussage):

$$\begin{aligned} & \overline{\forall n \in \mathbb{N}: A(n) \Rightarrow B(n)} \\ \Leftrightarrow & \exists n \in \mathbb{N}: \overline{A(n) \Rightarrow B(n)} \\ \Leftrightarrow & \exists n \in \mathbb{N}: A(n) \wedge \overline{B(n)} \quad \text{Wichtig: Wir verwenden diese Form!} \end{aligned}$$

- Vorgehen: Aufstellen einer Ableitungskette mit F am Ende:

Aussage	Begründung
$\exists n \in \mathbb{N}: A(n) \wedge \overline{B(n)}$	(Widerspruchsannahme)
$\Rightarrow A_1$	(Begründung für $\dots \rightarrow A_1$)
$\Rightarrow A_2$	(Begründung für $A_1 \rightarrow A_2$)
$\dots$	
$\Rightarrow A_m$	(Begründung für $A_{m-1} \rightarrow A_m$)
$\Rightarrow F$	(Begründung, warum A_m falsch ist)

Beispiel 3: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn n nicht gerade ist, dann ist $n/2$ keine natürliche Zahl.

Struktur der zu beweisenden Aussage:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{n \text{ nicht gerade}}_{A(n)} \Rightarrow \underbrace{n/2 \notin \mathbb{N}}_{B(n)}$$

Durch Negation der zu beweisenden Aussage erhalten wir die Widerspruchsannahme:

$$\begin{aligned} & \overline{\forall n \in \mathbb{N}: n \text{ nicht gerade} \Rightarrow n/2 \notin \mathbb{N}} \\ \Leftrightarrow & \exists n \in \mathbb{N}: \overline{n \text{ nicht gerade} \Rightarrow n/2 \notin \mathbb{N}} \\ \Leftrightarrow & \exists n \in \mathbb{N}: n \text{ nicht gerade} \wedge n/2 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Widerspruchsbeweis.

Aussage	Begründung
$\exists n \in \mathbb{N}: n \text{ nicht gerade} \wedge n/2 \in \mathbb{N}$	(Widerspruchsannahme)
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \overline{\exists m \in \mathbb{N}: n = 2m} \wedge n/2 \in \mathbb{N}$	(Definition „gerade“)
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \overline{\exists m \in \mathbb{N}: n/2 = m} \wedge n/2 \in \mathbb{N}$	(Beids. Division durch 2 erhält Gleichheit)
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: n/2 \notin \mathbb{N} \wedge n/2 \in \mathbb{N}$	(Vereinfachung)
$\Rightarrow \text{F}$	(Inkonsistente logische Aussage)

Hier liegt offenbar ein Widerspruch vor, da $n/2$ nicht gleichzeitig natürlich und nicht natürlich sein kann. □

Aufgabe 3: Beweisen Sie folgende Aussagen per Widerspruchsbeweis:

- (a) Für alle natürlichen n gilt: Wenn n gerade ist, dann ist $n + 1$ nicht gerade.
- (b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn n gerade ist, dann ist n^2 ebenfalls gerade.
- (c) Für alle natürlichen Zahlen x und y gilt: Wenn $x < y$, dann $y \geq x$.
- (d) $\forall x, y \in \mathbb{N}: (x^2 + y = 11 \wedge y \neq 7) \rightarrow x \neq 2$
- (e) Für alle natürlichen n gilt: Wenn $n < m$, dann ist $n - m \notin \mathbb{N}$.